Die Kegelschnitte,

Leitfaden für den Unterricht.

Bearbeitet

von

E. Lehmann,

Oberlehrer.

Bromberg, 1862.

Buchdruckerei von F. Fischer.

Die Kegelschnitte,

Leitfaden für den Unterricht.

Bearbeitet

von

E. Lehmann,

Oberlehrer.

Bromberg, 1862.

Buchdruckerei von F. Fischer.

Vorwort.

Die folgende Bearbeitung der Kegelschnitte ist durch die Erweiterung des mathematischen Lehrstoffes veranlaßt, welche die Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung vom 6. October 1859 für die Realschulen I. Ordnung herbeigeführt hat. Sie soll in den Händen der Schüler als Leitfaden dienen und das für den Unterricht nothwendige Material liefern. Eine vielseitige Behandlung des Stoffes erschien dabei wichtiger, als eine weitgehende; daher sind die analytischen Erörterungen mit den synthetischen verbunden. Wie bei den geradlinigen Figuren und dem Kreise der Schüler beide Hülfsmittel, Construction und Rechnung, anzuwenden geübt wird, so wird man ihm auch für die Betrachtung der neuen Figuren beide Wege zu eröffnen haben. Beide Methoden haben ihre Vorzüge; die synthetische führt zu lebendigen Anschauungen, haftet aber am Speciellen; die analytische besitzt umgekehrt alle wünschenswerthe Allgemeinheit, raubt aber den geometrischen Gestalten und der Beschäftigung damit ihren eigenthümlichen Reiz. Außerdem eignen sich bei den Kegelschnitten die Untersuchungen, welche z. B. auf die Brennpunkte Beziehung nehmen, besser für die synthetische und die, welche sich an die Achsen anlehnen, mehr für die analytische Behandlung. — Der Leitfaden soll den alten pädagogischen Forderungen genügen; es soll vom Speciellen ausgegangen und das Allgemeine aus der Kenntniß des Speciellen gewonnen, es soll nach allen Richtungen hin das Neue an Bekanntes angeknüpft und ein beschränkteres Gebiet in jeder Beziehung vertraut gemacht, es sollen die einfachsten Hülfsmittel benutzt

1*

werden. Von der analytischen Geometrie wird nur die Bekanntschaft mit rechtwinkligen Coordinaten vorausgesetzt, daher die Sätze von den parallelen Sehnen in eigenthümlicher, aber, wie mich dünkt, sehr einfacher Weise bewiesen worden sind. Die nach meinem Dafürhalten unerläßliche Betrachtung der Durchschnittsfiguren am Kegel hoffe ich gleichfalls in keiner unzweckmäßigen Weise ausgeführt zu haben.

Der Verfasser.

I. Von der Parabel.

Synthetischer Theil.

§ 1.

Erklärung. Die Parabel ist eine Kurve, deren sämmtliche Punkte von einer geraden Linie dieselbe Entfernung haben, wie von einem festen Punkte. — Die Gerade heißt Leitlinie (linea directrix), der Punkt Brennpunkt, jede Gerade, welche einen Punkt der Kurve mit dem Brennpunkt verbindet, Leitstrahl (radius vector), die Gerade, welche durch den Brennpunkt geht und senkrecht auf der Leitlinie steht, Achse, jede zur Achse parallele Linie Parallelstrahl.

Folgerung. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die eine gegebene Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen, ist eine Parabel.

Construction a) in einem Zuge:

An einem Lineal ist in E ein Faden befestigt, der so lang ist wie AE; das andere Ende des Fadens ist in B mit einer Nadel im Papier festgesteckt. Indem nun das Lineal parallel mit sich selber fortbewegt und durch einen Stift der Faden immer straff gehalten wird, beschreibt der Stift auf dem Papier einen Parabelbogen, für welchen LD die Leitlinie und B der Brennpunkt ist. Fig. 1.

Beweis: BS + SE = AS + SE, also

BS = AS und S ein Punkt der Parabel,

ferner BP + PE′ = A′P + PE′, also

BP = A′P und P ebenfalls ein Parabelpunkt.

b) Durch einzelne Punkte:

Fig. 2. Man zieht Parallelen zur Leitlinie, mißt die Entfernung der einzelnen Parallelen von der Leitlinie ab und schlägt mit diesen Entfernungen Kreise um den Brennpunkt. Die Punkte, in welchen diese Kreise die betreffenden Parallelen schneiden, sind Punkte der Parabel, welche schließlich durch einen freien Zug verbunden werden müssen.

Beweis einfach.

Anmerkung. Andere Constructionen (die weniger einfach sind) erhält man, wenn man die Parallelen zur Achse zieht und in ihnen die Punkte der Parabel als Spitzen von gleichschenkligen Dreiecken bestimmt, deren Grundlinien bekannt sind.

§ 2.

Erklärung. Ein Punkt, von der Kurve aus auf der Seite des Brennpunktes gelegen, liegt innerhalb der Parabel, ein solcher auf der Seite der Leitlinie dagegen außerhalb.

Lehrsatz 1. Jeder innerhalb der Parabel gelegene Punkt ist dem Brennpunkt näher als der Leitlinie.

Fig. 3. **Voraussetzung.** BF und BG treffen verlängert die Parabel in P und Q.

Behauptung. a) $BF < FF'$ und b) $BG < GG'$.

Beweis. a) $BP = PP'$, also

$BP - FP < PP' + EF$ oder $BF < FF'$.

b) $BQ = QQ'$

$GQ > QH$

also $BQ - GQ < QQ' - QH$ oder $BG < GG'$.

Lehrsatz 2. Jeder außerhalb der Parabel gelegene Punkt ist der Leitlinie näher als dem Brennpunkte.

Fig. 4. **Voraussetzung.** BF und BG schneiden die Parabel in P und Q.

Behauptung. a) $BF > FF'$ und b) $BG > GG'$.

Beweis. a) $BP = PP'$, also

$BP + PF > PP' - PE$ oder $BF > FF'$.

b) $BQ = QQ'$

$QG > GH$

also $BQ + QG > QQ' + GH$ oder $BG > GG'$.

Folgerung. Innere oder näher am Brennpunkt, so wie äußere oder näher an der Leitlinie liegende Punkte bedeutet dasselbe; den Uebergang machen die Punkte der Parabel, für welche Gleichheit der Entfernungen stattfindet.

§ 3.

Lehrsatz 1. Die Parabel bildet über und unter der Achse 2 congruente Zweige.

Beweis. Schlägt man den unteren Theil der Parabel mit den Parallelen um die Achse herum, so fallen die unteren Theile der Parallelen mit den oberen zusammen, und da GU = GP, HV = HQ u. s. w. ist, so fällt U auf P, V auf Q u. s. w., d. h. die beiden Zweige decken sich. Fig. 2.

Zusatz. Die zur Achse senkrechten Parabelsehnen werden von ihr halbirt.

Lehrsatz 2. In der Achse liegt nur 1 Punkt der Parabel und zwar in der Mitte zwischen Brennpunkt und Leitlinie.

Beweis. Ein Punkt in der Achse, der von Brennpunkt und Leitlinie gleiche Entfernung haben soll, muß von B und A gleich weit entfernt, kann also nur der Halbirungspunkt von BA sein. Fig. 2.

Folgerung 1. Die Parabel schneidet die Achse in S und sonst nicht wieder.

Lehrsatz 3. Der Punkt in der Achse liegt von allen Parabelpunkten der Leitlinie am nächsten.

Beweis erhellt aus § 1, Construction b; denn von den Kreisen um B wird die durch S gehende Parallele berührt, jede der Leitlinie nähere Parallele gar nicht getroffen, jede entferntere in 2 Punkten geschnitten.

Folgerung 2. Der in der Achse liegende Punkt (S) heißt Scheitelpunkt der Parabel.

Folgerung 3. Von der Leitlinie entfernt sich die Parabel bis in's Unendliche.

Lehrsatz 4. Jeder Parallelstrahl wird nur einmal von der Parabel geschnitten.

Beweis. Jeder Punkt Z in dem Parallelstrahl PP′ liegt näher an B als an P′, denn Fig. 5.

ZB $<$ ZP + BP oder, da BP = PP′ ist,

ZB $<$ ZP + PP′ oder

ZB $<$ ZP′.

Wie weit man auch den Parallelstrahl in der Richtung PZ verlängern mag, er bleibt immer innerhalb der Parabel und schneidet dieselbe nicht wieder.

Folgerung 4. Die Parabel biegt sich nie zur Achse zurück, sondern entfernt sich von ihr bis in's Unendliche.

§ 4.

Erklärung. Eine Gerade, die nur 1 Punkt mit einer Kurve gemein hat und nach beiden Seiten hin außerhalb derselben liegt, heißt Tangente, die im Berührungspunkte auf ihr Senkrechte heißt Normale.

Lehrsatz 1. Im Scheitelpunkt steht die Tangente senkrecht auf der Achse, und die Achse ist Normale.

Beweis leicht.

Lehrsatz 2. Werden die Winkel, welche Leitstrahl und Parallelstrahl mit einander bilden, halbirt, so erhält man Tangente und Normale des Parabelpunktes.

Fig. 6. **Fall 1. Voraussetzung.** $\angle$ TPP′ = $\angle$ TPB.

Behauptung. TG ist Tangente.

Beweis. $\triangle$ GPP′ $\cong$ $\triangle$ GPB,

daher GP′ = GB,

aber GP′ $>$ GG′,

---

also auch GB $>$ GG′ und G, sowie die ganze Linie von P nach G hin liegt außerhalb der Parabel.

Dasselbe läßt sich für jeden Punkt H auf der anderen Seite der Tangente beweisen.

Fall 2. Voraussetzung. $\angle$ NPB = $\angle$ NPZ.

Behauptung. PN ist Normale.

Beweis. Zieht man TG $\perp$ PN in P, so ist auch $\angle$ BPT = $\angle$ ZPG = $\angle$ TPP′, es halbirt also diese Senkrechte $\angle$ BPP′, ist also Tangente (Fall 1); daher auch PN Normale.

Lehrsatz 3. (Umkehrung.) Jede Tangente halbirt den Winkel, den der Leitstrahl des Berührungspunktes mit dem Parallelstrahl bildet.

Beweis. Gesetzt, es gäbe für einen Punkt noch eine Tangente, die den bezeichneten Winkel nicht halbirte, so würde es nahebei einen Parabelpunkt geben, der eine dieser Tangente parallele Tangente hätte. Dies wäre etwas Unmögliches, denn eine Tangente, parallel verschoben, kann nicht Tangente bleiben.

Zusatz. Jede Normale halbirt den Nebenwinkel desjenigen Winkels, der von der Tangente halbirt wird.

Anmerkung. Ein Wärmestrahl (Licht-, Schallstrahl), der parallel der Achse auf eine parabolisch-gekrümmte Fläche fällt, wird wegen Gleichheit des Einfalls- und Reflexions-Winkels nach der Zurückwerfung durch den Brennpunkt gehen, und umgekehrt: ein Strahl, der vom Brennpunkt aus auf die Fläche fällt, geht nach der Reflexion parallel der Achse fort. Es erklärt sich hieraus die Benennung Brennpunkt für B und Brennweite für SB.

§ 5.

Lehrsatz 1. Die Linie BP', welche vom Brennpunkt nach dem Durchschnittspunkt des Parallelstrahls und der Leitlinie geht, steht 1. auf der Tangente TP senkrecht, wird 2. von ihr halbirt und der Halbirungspunkt liegt 3. in der Scheiteltangente. Fig. 6.

Beweis zu 1. und 2. leicht;

zu 3: $BE = EP'$ und $BS = SA$, also

$SE \# AP'$ und E ein Punkt der Scheiteltangente.

Lehrsatz 2. Die Durchschnittspunkte der Tangente und Normale mit der Achse sind eben so weit vom Brennpunkt entfernt, als der Berührungspunkt.

Beweis leicht.

Folgerung. Wenn der Punkt P sich auf der Parabel weiter bewegt, entfernt sich der Durchschnittspunkt der Tangente und Achse immer weiter vom Brennpunkte, und die Tangenten schneiden die Achse unter immer kleineren Winkeln. Die Tangente kann jedoch nie parallel, die Normale nie senkrecht zur Achse werden.

§ 6.

Aufgabe 1. An einen gegebenen Punkt der Parabel eine Tangente zu ziehen.

Fig. 6. **Auflösung.** 1) Man halbirt $\angle$ BPP'.

2) Man fällt von P eine Senkrechte auf BP'.

3) Man verbindet P mit dem Halbirungspunkte von BP'.

4) Man verbindet P mit dem Durchschnittspunkte E von BP' und der Scheiteltangente,

5) (einfachste). Man schlägt mit BP einen Kreis um B und verbindet den Durchschnittspunkt T dieses Kreises und der Achse mit P.

6) Man macht BN = BP, verbindet N mit P und errichtet auf NP in P eine Senkrechte.

7) Man schlägt über dem Radiusvector BP einen Halbkreis und verbindet den Punkt E, in welchem der Kreis die Scheiteltangente schneidet, mit P.

Beweise leicht nach § 4 und 5.

Aufgabe 2. An einen gegebenen Punkt der Parabel eine Normale zu ziehen.

Auflösungen denen der vorigen Aufgabe sich anschließend.

Fig. 7. **Aufgabe 3.** Von einem außerhalb der Parabel gelegenen Punkte F aus die beiden Tangenten an die Kurve zu ziehen.

Auflösung. Man schlägt einen Kreis mit FB um F, der die Leitlinie LD in P' und Q' schneidet, und zieht PP' und QQ' $\perp$ LD. Dann sind FP und FQ die verlangten Tangenten.

Beweis. $\triangle$ FPP' $\cong$ $\triangle$ FPB und $\triangle$ FQQ' $\cong$ $\triangle$ FQB (3 Seiten), also $\angle$ FPP' = $\angle$ FPB und $\angle$ FQQ, = $\angle$ FQB und FP und FQ Tangenten nach § 4 Lehrsatz 2.

Analytischer Theil.

§ 7.

Gleichung der Parabel. Man wählt den Scheitelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten, die Parabel-Achse zur Abscissen-, die Scheiteltangente zur Ordinaten-Achse. Für einen beliebigen Punkt P der Parabel ist PE = y, SE = x. Es soll die Beziehung von y und x zu einander durch eine Gleichung ausgedrückt werden. Fig. 8.

AB ist eine gegebene Größe, sie werde

$= \frac{p}{2}$ gesetzt, dann ist $AS = BS = \frac{p}{4}$.

Nach der Grundbedingung für den Parabelpunkt ist

$PB = PP' = AE = x + \frac{1}{4}p$; im rechtwinkligen

$\triangle$ BEP ist also $PB = x + \frac{1}{4}p$, $BE = x - \frac{1}{4}p$ und

nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$y^2 = (x + \frac{1}{4}p)^2 - (x - \frac{1}{4}p)^2$ oder reducirt

$y^2 = px$. Dies ist die Scheitelgleichung der Parabel.

§ 8.

Diskussion der Gleichung $y^2 = px$.

1) Für $x = o$ wird $y = o$; daraus folgt: die Parabel schneidet die x Achse in S. (§ 3, Folg. 1.) Fig. 8.
2) Für keinen andern Werth von x wird $y = o$; daraus folgt: die Achse wird nicht zum zweiten Male geschnitten. (§ 3, Folg. 1.)
3) Für $x = + m$ wird $y = + \sqrt{pm}$ und $= - \sqrt{pm}$; daraus folgt: § 3, Lehrs. 1 und Zus.
4) Für wachsende x wird auch y immer größer, wenn auch die Ordinaten nur wie die Wurzeln aus den Abscissen sich verhalten.
5) Für $x = \infty$ wird $y = \infty$; daraus folgt: § 3, Folg. 3 und 4.

6) Für $x = - m$ wird y imaginär; daraus folgt: die Parabel erstreckt sich nur auf der einen Seite der y Achse und existirt auf der andern gar nicht.

7) Für $y = \pm m$ wird $x = \frac{m^2}{p}$, x hat also nur einen Werth; daraus folgt: § 3, Lehrs. 4.

8) Für $x = \frac{1}{4} p$ wird $y = + \frac{1}{2} p$ und $= - \frac{1}{2} p$; daraus folgt: $CG = p$.

Folgerung. Die Sehne, welche senkrecht zur Achse durch den Brennpunkt geht, ist gleich der 4fachen Brennweite.

Erklärung. Diese Sehne heißt der Parameter der Parabel, und ihr Werth ist die Constante der Parabelgleichung.

§ 9.

Tangente und Normale für den durch x' und y' gegebenen Punkt der Parabel.

Lehrsatz 1. Der Berührungspunkt der Tangente und ihr Durchschnittspunkt mit der x Achse haben gleiche, aber entgegengesetzte Abscissen.

Fig. 9. **Beweis.** Nach § 5, Lehrsatz 2 ist $BT = BP$, also dem absoluten Werth nach, $BT = x' + \frac{1}{4} p$ und $TS = x'$, als Abscisse $TS = - x'$.

Aufgabe 1. Die Gleichung der Tangente zu bestimmen.

Auflösung. Aus den Coordinaten des Berührungspunktes x' und y' und denen des Durchschnittspunktes mit der x Achse $- x'$ und o findet sich

$$y - y' = \frac{y'}{2x'} . (x - x')$$

oder da $\frac{y'}{2x'} = \frac{y'^2}{2x'y'} = \frac{p\,x'}{2x'y'} = \frac{p}{2y'}$,

$$y - y' = \frac{p}{2y'} . (x - x').$$

Folgerung 1. Bezeichnet man den Winkel, unter welchem die Tangente die x Achse schneidet, mit α, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{2\,y'}.$$

Abgesehen vom Vorzeichen wird α immer kleiner, wenn y' größer wird, erreicht aber nie den Werth von 0^0. (§. 5, Folg.)

Lehrsatz 2. Die Abscissen für den Berührungspunkt und den Durchschnittspunkt der Normale mit der x Achse haben eine constante Differenz, die dem halben Parameter gleich ist.

Beweis. Nach § 5, Lehrs. 2 ist BN = BP, also Fig. 9.

$$BN = x' + \frac{1}{4}\,p$$

$$SN = x' + \frac{1}{2}\,p \text{ und}$$

$$SN - SE = EN = \frac{1}{2}\,p.$$

Anmerkung. EN, die Projection der Normale auf die x Achse, wird Subnormale genannt.

Aufgabe 2. Die Gleichung der Normale zu bestimmen.

Auflösung. Da Normale und Tangente senkrecht auf einander stehen, so folgt:

$$y - y' = -\frac{2\,x'}{y'}.\,(x - x') \text{ oder}$$

$$y - y' = -\frac{2\,y'}{p}.\,(x - x').$$

Folgerung 2. Der Winkel β, den die Normale mit der x Achse macht, ergiebt sich aus

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{2\,y'}{p}$$

und kommt allmählich dem Rechten näher.

§ 10.

Parallele Sehnen, Durchmesser.

Erklärung. Eine Gerade, welche ein System paralleler Sehnen halbirt, heißt Durchmesser der Kurve.

Lehrsatz 1. Die Achse der Parabel ist ein Durchmesser. (§ 3, Zus.)

Lehrsatz 2. Die Ordinate des Berührungspunktes einer Tangente ist das arithmetische Mittel zwischen den Ordinaten, welche zu den Endpunkten einer der Tangente parallelen Sehne gehören.

Fig. 10. **Voraussetzung.** FG ‖ QR.

Behauptung. $y' = \frac{y'' + y'''}{2}$

Beweis. FG und QR machen mit der x Achse gleiche Winkel.

Für FG ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{2\,y'}$ (§ 9, Folg. 1).

Für QR ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'' - y'''}{x'' - x'''}$

Hier folgt $\frac{p}{2\,y'} = \frac{y'' - y'''}{x'' - x'''}$ und

$$2\,y' = \frac{px'' - px'''}{y'' - y'''} = \frac{y''^2 - y'''^2}{y'' - y'''} = y'' + y'''.$$

Also $y' = \frac{y'' + y'''}{2}$.

Lehrsatz 3. Der durch den Berührungspunkt einer Tangente gehende Parallelstrahl halbirt alle der Tangente parallelen Sehnen.

Fig. 10. **Beweis.** Der Halbirungspunkt H der Sehne QR hat in Beziehung auf die x Achse die mittlere Entfernung der Endpunkte, also

$$HN = \frac{y'' + y'''}{2}. \text{ Zugleich ist}$$

$$PM = \frac{y'' + y'''}{2} \text{ nach vorigem Satze.}$$

Also HN = PM.

Für den Halbirungspunkt K der parallelen Sehne UV gilt gleichfalls

$$KO = \frac{y^{IV} + y^{V}}{2}, \text{ während auch}$$

$$PM = \frac{y^{IV} + y^{V}}{2}$$ ist nach vorigem Satze.

Also ist auch KO = PM.

Für alle anderen parallelen Sehnen gilt dasselbe, ihre Halbirungspunkte haben die Entfernung PM von der x Achse, liegen also sämmtlich in dem durch P gehenden Parallelstrahl.

Folgerung. Die Parallelstrahlen sind Durchmesser der Parabel.

§. 11.

Größe des Parabel-Segments.

Lehrsatz 1. Der Flächeninhalt eines Dreiecks, welches über einer Parabelsehne so construirt wird, daß seine Spitze in den Berührungspunkt der zur Sehne parallelen Tangente fällt, hängt nur von der Differenz der Ordinaten ab, die zu den Endpunkten der Sehne gehören.

Beweis. QR sei in H halbirt, dann ist PH ‡ der x Achse (§ 10), und indem man die Inhalte der beiden Dreiecke PQH und PRH zusammenfaßt, findet sich, PH als gemeinschaftliche Grundlinie genommen, Fig. 11.

$$\triangle\, PQR = \frac{PH\,.\,(y'' - y''')}{2}.$$

Nun ist aber PH = EC = SC — SE

$$SC = \frac{x'' + x'''}{2}$$

$$SE = x'$$

$$\text{Also } PH = \frac{x'' + x'''}{2} - x' = \frac{x'' + x''' - 2\,x'}{2}.$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung von $y^2 = px$

$$PH = \frac{y''^2 + y'''^2 - 2\,y'^2}{2p} = \frac{y''^2 + y'''^2 - 2\left(\frac{y'' + y'''}{2}\right)^2}{2p}$$

(§ 10, Lehrs. 2.) Nach erfolgter Reduction ist

$$PH = \frac{1}{4p}.(y'' - y''')^2$$ und endlich

$$\triangle\, PQR = \frac{1}{8p}.(y'' - y''')^3.$$

Folgerung 1. Welche Größe die Ordinaten einzeln auch haben mögen, ihr Unterschied allein entscheidet über die Größe des entsprechenden Dreiecks, und zwar verhalten sich diese Dreiecke, wie die Cuben der zugehörigen Unterschiede. Bei gleichen Unterschieden sind die Dreiecke einander gleich; verhalten sich die Unterschiede wie $1 : \frac{1}{2}$, so die Dreiecke wie $1 : \frac{1}{8}$.

Lehrsatz 2. Ein Parabelsegment ist gleich $\frac{4}{3}$ von dem in Lehrs. 1 bezeichneten Dreieck.

Behauptung. Segm. $PQR = \frac{4}{3} \triangle PQR$.

Beweis nach der Exhaustions-Methode des Archimedes. Bezeichnet man $\triangle PQR$ mit J und sind U und V die Berührungspunkte der zu PQ und PR ‖ laufenden Tangenten, so ist, da der Unterschied der Ordinaten von P und Q nur halb so groß ist, wie der von R und Q,

$\triangle PUQ = \frac{1}{8}$ J. Desgleichen $\triangle PVR = \frac{1}{8}$ J.

Zum $\triangle PQR$ kommen also 2 Dreiecke hinzu, deren jedes $= \frac{1}{8}$ J ist.

Nimmt man ferner die 4 Dreiecke über den Sehnen QU, UP, PV und VR, so ist jedes davon $= \frac{1}{8} . \frac{1}{8} J = \frac{1}{8^2} . J$.

Fügt man hierzu immer neue Dreiecke über den der Zahl nach sich verdoppelnden Sehnen, so erhält man

$$\text{Segm. } PQR = J + 2 . \frac{1}{8} J + 2^2 . \frac{1}{8^2} . J + 2^3 . \frac{1}{8^3} J + 2^4 . \frac{1}{8^4} J + \ldots .$$

$$\text{oder Segm. } PQR = J + \frac{1}{4} J + \frac{1}{4^2} J + \frac{1}{4^3} J + \frac{1}{4^4} J + \ldots .$$

$$= J . \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{256} + \ldots .\right)$$

$$= J . \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

Endlich Segm. PQR $= \frac{4}{3}$ J.

Anmerkung. Dieses Resultat ist schon von Archimedes*) gefunden worden und bemerkenswerth, weil trotz der krummlinigen Begrenzung der Werth sehr einfach und rational ist.

Lehrsatz 3. Ein Parabelsegment ist gleich $\frac{2}{3}$ eines Parallelogramms, das zwischen der zugehörigen Sehne und der ihr parallelen Tangente liegt und die Sehne zur Grundlinie hat.

Beweis. $\square$ QRWZ $= 2 \triangle$ QRP;

$$\text{Segm. QRP} = \frac{4}{3} \triangle \text{ QRP} = \frac{2}{3}. \square \text{ QRWZ}.$$

Zusatz 1. Segm.PQH $= \frac{2}{3} \square$ PZQH.

Beweis. Segm. PQH = Segm. PRH, denn $\triangle$ PQH $= \triangle$ PRH und das Segm. über PQ ist = dem über PR (Lehrs. 1); also Segm. PQH $= \frac{1}{2}$ Segm. PQR. Ebenso $\square$ PZQH $= \frac{1}{2} \square$ WZQR; also auch Segm. PQH $= \frac{2}{3}$ $\square$ PZQH.

Zusatz 2. Segm. SEPC $= \frac{2}{3} \square$ SEPZ $= \frac{2}{3}$ xy. Fig. 8.

Folgerung 2. Durch einen Parabelbogen, der zwei gegenüberliegende Ecken eines Parallelogramms verbindet, kann man dasselbe im Verhältniß von 2 : 1 theilen.

---

*) Arneth: Geschichte der reinen Mathematik. 1852. Seite 108. Chasles: Geschichte der Geometrie, übertragen von Sohncke. 1839. Seite 12. Magnus: Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. 1833. Seite 497.

II. Von der Ellipse.

Synthetischer Theil.

§ 12.

Erklärung 1. Die Ellipse ist eine Kurve, deren Punkte von einem festen Kreise und einem innerhalb desselben liegenden Punkte gleiche Entfernung haben.

Fig. 12. Ist der Kreis um A und der Punkt B gegeben, so sind P und P′ u. s. w. Punkte der Ellipse, wenn PG = PB, P′G′ = P′B u. s. w.

Diese Definition der Ellipse entspricht der für die Parabel (§ 1) gegebenen, indeß kann dieselbe einfacher und zweckmäßiger gefaßt werden; einfacher, indem man die Beziehung zur Kreislinie entbehren kann; zweckmäßiger, indem für die Punkte A und B keine Verschiedenheit bestehen bleibt. Schlägt man nämlich den Kreis um B anstatt um A, und wird A der feste Punkt, so erhält man dieselben Punkte P, P′ u. s. w. als Punkte der Ellipse,

denn AG = BH

PG = PB. Gl. von Gl. läßt Gl.

also AP = PH. Ebenso AP′ = P′H′ u. s. w.

Somit erhellt, daß die Punkte A und B keine verschiedene Bedeutung für die Ellipse haben.

Indem man nun bedenkt, daß

AP + PB = AP + PG = AG

AP′ + P′B = AP′ + P′G′ = AG′ u. s. w., so folgt

Erklärung 2. Die Ellipse ist eine Kurve, für deren Punkte die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten constant ist.

Diese Erklärung wird fortan den Erörterungen zu Grunde gelegt. — Die festen Punkte A und B heißen Brennpunkte; jede Gerade, die einen Brennpunkt mit einem

Punkte der Kurve verbindet, ist ein Leitstrahl (rad. vector), der Halbirungspunkt M von AB der Mittelpunkt, die Entfernung des Mittelpunktes von den Brennpunkten (MA oder MB) die Excentricität, die Linie AB, beiderseits bis zur Ellipse verlängert, die große Achse, die, hierauf senkrecht, durch M gehende Linie die kleine Achse, jede durch M gehende Gerade ein Durchmesser, für welche letztere Bezeichnung aber erst § 21, Lehrs. 3 die Rechtfertigung erfolgt.

Folgerung 1. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die einen gegebenen Kreis von innen berühren und durch einen im Kreise gelegenen Punkt gehen, ist eine Ellipse.

Folgerung 2. Der geometrische Ort für die Spitzen der Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und für die anderen Seiten eine gleiche Summe haben, ist eine Ellipse.

Construction a) in einem Zuge. — In den Punkten A und B befestigt man die Enden eines Fadens, der länger sein muß als AB, und führt den Stift längs des straff gehaltenen Fadens rings herum. Der Stift beschreibt die Ellipse. Fig. 13.

b) durch einzelne Punkte. — Indem man um A und B wiederholt Kreise mit solchen Radien schlägt, die zusammen einer bestimmten Linie s gleich sind, kann man nach einander beliebig viel Punkte der Ellipse erhalten, die man dann durch einen freien Zug verbindet.

Wenn man mehrere Ellipsen so construirt, daß die Brennpunkte verschiedene Abstände haben, während die Summe s der Leitstrahlen unverändert bleibt, so sieht man, daß bei Annäherung der Brennpunkte an einander die Ellipse allmählich in den Kreis übergeht. Der Kreis selbst ist eine Ellipse, deren Brennpunkte zusammengefallen sind.

§. 13.

Lehrsatz 1. Für jeden innerhalb der Ellipse gelegenen Punkt ist die Summe der Entfernungen kleiner, für jeden außerhalb gelegenen größer als die Summe zweier zusammengehöriger Leitstrahlen.

Beweis leicht.

Lehrsatz 2. Die große Achse erstreckt sich nach beiden Seiten gleichweit über die Brennpunkte hinaus.

Fig. 14. **Behauptung.** AC = BD.

Beweis. Die Punkte C und D liegen in der Ellipse,
also AC + BC = AD + BD
oder AC + AC + AB = AB + BD + BD
oder 2AC + AB = AB + 2BD,
also 2AC = 2BD
AC = BD.

Folgerung. Der Mittelpunkt halbirt die große Achse, CM = DM.

Erklärung. Die in der großen Achse liegenden Punkte der Ellipse (C und D) heißen Scheitelpunkte.

Lehrsatz 3. Die große Achse ist gleich der Summe zweier zusammengehöriger Leitstrahlen.

Behauptung. AP + BP = CD.

Beweis. AP + BP = AD + BD = AD + AC (Lehrs. 2) = CD.

Lehrsatz 4. Die nach den Endpunkten der kleinen Achse gehenden Leitstrahlen sind der halben großen Achse gleich.

Fig. 15. **Behauptung.** AE = BE = AF = BF = $\frac{1}{2}$ CD.

Beweis. △ AEM ≌ △ BEM, also AE = BE, und da AE + BE = CD (Lehrs. 3) ist, AE = BE = $\frac{1}{2}$ CD.

Ebenso △ AFM ≌ △ BFM, also AF = BF, und da AF + BF = CD ist, auch AF = BF = $\frac{1}{2}$ CD.

Lehrsatz 5. Der Mittelpunkt halbirt die kleine Achse.

Beweis. AEBF ist ein Rhombus nach Lehrs. 4, also EM = FM.

§ 14.

Lehrsatz 1. Eine gerade Linie schneidet entweder die Ellipse in zwei Punkten, oder berührt sie in einem Punkte, oder liegt ganz außerhalb derselben.

Voraussetzung 1. Die Gerade HK schneidet die Achse zwischen A und B im Punkte G. Fig. 16.

Beweis. Für den Punkt G der Linie HK ist die Summe der Entfernungen AG + BG die kleinste; sodann erhält man: AG + BG < AN + BN < AO + BO < AP + BP u. s. w. Je weiter man sich von G entfernt, desto größer wird die Summe der Entfernungen, kann dabei aber auf jeder Seite nur ein Mal den für die Ellipsenpunkte bestimmten Werth s annehmen. Also existiren zwei, aber auch nur zwei Durchschnittspunkte.

Voraussetzung 2. Die Gerade HK hat eine andere Lage. Fig. 17.

Beweis. Fällt man von einem Brennpunkte, z. B. A, ein Perpendikel AJ auf HK und verlängert es um sich selbst, so daß LJ = AJ wird, so ist jeder Punkt der Linie HK eben so weit von L entfernt, als von A. Zieht man nun die Linie LB, welche HK in G schneidet, so ist G der Punkt von HK, für welchen die Summe der Entfernungen von L und B die kleinste ist und man erhält:
LG + BG < LN + BN < LO + BO u. s. w., daher auch
AG + BG < AN + BN < AO + BO u. s. w.

Je weiter man sich in der Linie HK nach beiden Seiten von G entfernt, desto größer wird die Summe der Entfernungen von A und B. Nun können drei Fälle eintreten:

1) AG + BG < s; dann schneidet HK auf jeder Seite von G die Ellipse, es giebt also zwei Durchschnittspunkte.

2) AG + BG = s; dann ist G ein Punkt der Ellipse, alle anderen Punkte von HK aber liegen außerhalb. HK berührt die Ellipse in G.

3) AG + BG > s; dann liegt G, und um so mehr jeder andere Punkt von HK, außerhalb der Ellipse, die Linie trifft die Ellipse gar nicht.

Lehrsatz 2. Jeder Durchmesser der Ellipse wird im Mittelpunkte halbirt.

Behauptung. PM = QM.

Beweis. Es sei PM um sich selbst verlängert bis Q′, dann ist APBQ′ ein Parallelogramm, weil sich die Diagonalen Fig. 18.

gegenseitig halbiren; folglich $AQ' + BQ' = AP + BP$ und Q' ein Punkt der Ellipse. Da es für den Durchmesser nur zwei Durchschnittspunkte mit der Ellipse giebt (Lehrs. 1), so muß Q' und Q derselbe Punkt, also Q eben so weit von M entfernt sein als P.

Lehrsatz 3. Alle der kleinen Achse parallelen Sehnen werden durch die große Achse halbirt.

Fig. 19. **Behauptung.** $PG = QG$.

Beweis. Es werde angenommen, in der Verlängerung von PG sei Q' der Punkt, dessen Entfernung von $G = PG$ wäre. Verbindet man dann Q', so wie P mit A und B, so ergiebt sich

$\triangle AQ'G \cong \triangle APG$, also $AQ' = AP$, und

$\triangle BQ'G \cong \triangle BPG$, also $BQ' = BP$.

Hieraus folgt $AQ' + BQ' = AP + BP$.

Q' ist also ein Punkt der Ellipse, gleichwie P; mehr als zwei Punkte kann es in der geraden Linie nicht geben; also muß Q' mit Q derselbe Punkt und $PG = QG$ sein.

Lehrsatz 4. Die zu beiden Seiten der großen Achse liegenden Theile der Ellipse sind congruent.

Beweis durch Deckung.

Lehrsatz 5. Alle der großen Achse parallelen Sehnen werden von der kleinen Achse halbirt.

Fig. 20. **Behauptung.** $PH = RH$.

Beweis. In der Verlängerung von PH sei R' der Punkt, dessen Entfernung von $H = PH$ wäre. Verbindet man dann R' und P mit A, M und B, so erhält man $\triangle MR'H \cong \triangle MPH$, folglich $R'M = PM$ und $\angle R'MH = \angle PMH$. Hiernach ist

$\triangle BR'M \cong \triangle APM$, also $BR' = AP$

$\triangle AR'M \cong \triangle BPM$, also $AR' = BP$.

Es folgt $AR' + BR' = AP + BP$, also R' ein Punkt der Ellipse, dann aber R' und R derselbe Punkt und $PH = RH$.

Lehrsatz 6. Die zu beiden Seiten der kleinen Achse liegenden Theile der Ellipse sind congruent.

Beweis wie bei Lehrs. 4.

§ 15.

Lehrsatz 1. Werden die Winkel, welche zwei zusammengehörige Leitstrahlen mit einander bilden, halbirt, so erhält man Tangente und Normale des Ellipsenpunktes.

Voraussetzung. $\angle$ APK $= \angle$ LPK
$\angle$ APN $= \angle$ BPN.

Behauptung. HK ist Tangente und PN Normale. Fig. 21.

Beweis. Zuvörderst ist zu beachten, daß Linien, welche Nebenwinkel halbiren, senkrecht auf einander stehen, daß also PN Normale sein muß, wofern HK Tangente ist. Letzteres bleibt zu beweisen.

Fällt man von A ein Perpendikel AJ auf HK und verlängert es, bis es BL schneidet, so wird $\triangle$ APJ $\cong \triangle$ LPJ; denn JP = JP, $\angle$ BJP $= \angle$ LJP = R und $\angle$ APJ $= \angle$ LPJ (n. V.). Also ist AJ = LJ und jeder Punkt in HK ebenso weit von L entfernt, als von A. Von allen Punkten in HK ist die Summe der Abstände von L und B, mithin auch von A und B, für den Punkt P die kleinste, und da P in der Ellipse liegt, so liegen alle anderen Punkte außerhalb derselben, d. h. HK ist eine Tangente.

Anmerkung. Alle Wärmestrahlen (Licht-, Schallstr.), die von einem der Brennpunkte aus auf eine elliptisch geformte Fläche fallen, werden so reflectirt, daß sie sich in dem anderen Brennpunkte wieder vereinigen.

Folgerung 1. In den Endpunkten der Achsen stehen die Tangenten auf den Achsen senkrecht, und die Normalen fallen mit den Achsen selbst zusammen.

Folgerung 2. Die in den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Tangenten sind parallel. Fig. 22.

Behauptung. PT $\#$ QS.

Beweis. APBQ ist ein Parallelogramm, weil die Diagonalen sich gegenseitig halbiren; mithin BP $\#$ AQ und $\angle$ MPB $= \angle$ AQM; also ist auch $\angle$ BPL $= \angle$ AQK als Nebenwinkel gleicher Winkel und $\angle$ LPT $= \angle$ KQS als Hälften gleicher Winkel. Dies sind aber äußere Wechselwinkel, mithin PT $\#$ QS.

Lehrsatz 2. Tangente und Normale schneiden die große Achse und deren Verlängerung so, daß die Entfernungen der Durchschnittspunkte von den Brennpunkten sich wie die Leitstrahlen des Berührungspunktes verhalten.

Fig. 21. **Behauptung.** 1) AN : BN = AP : BP
2) AT : BT = AP : BP.

Beweis. Für 1) sofort ersichtlich.

Für 2) ziehe man AL′ ⫲ TP; dann ist ∠ AL′P = ∠ TPL als Gegenw. und ∠ L′AP = ∠ APT als Wechselw. Nun ist aber ∠ APT = ∠ TPL (Lehrs. 1), mithin auch ∠ AL′P = ∠ L′AP und PL′ = AP. Also
AT : BT = PL′ : BP = AP : BP.

Folgerung 2. AN : BN = AT : BT, d. h. A, B, T und N sind vier harmonische Punkte.

Folgerung 3. Die Normale geht nur durch den Mittelpunkt der Ellipse, wenn sie mit einer der Achsen ganz zusammenfällt.

§ 16.

Aufgabe 1. An einen Punkt der Ellipse eine Tangente zu ziehen.

Fig. 21. **Auflösung 1** (einfachste). Man halbirt ∠ LPA.

2. Man macht PL = PA, zieht LA und fällt darauf von P ein Perpendikel PJ.

3. Man halbirt LA in J und verbindet J mit P.

4. Man schlägt mit der halben großen Achse einen Kreis um den Mittelpunkt M und verbindet den Durchschnittspunkt J dieses Kreises und der Linie AL mit P.

Beweis. $MJ = \frac{1}{2}$ BL, also MJ : BL = AM : AB und da die den größeren Seiten gegenüberliegenden Winkel JAM und LAB gleich sind, so ist △ JAM ∾ △ LAB. Daher MJ ⫲ BL und AJ = JL und somit JP Tangente.

Anmerkung. Hierbei liegt L in der Peripherie des Leitkreises (§ 12) und J in der Peripherie des über der großen Achse als Durchmesser beschriebenen Kreises.

5. Man macht PL′ = PA und zieht PT ⫲ AL′.

Beweis. AT : BT = PL′ : BP = AP : BP. Demnach PT Tangente in Folge von §. 15, Lehrs. 2.

6. Man construirt die Normale durch Halbirung von ∠ APB oder durch Theilung von AB im Verhältniß von AP : BP und zieht dann die Tangente senkrecht zur Normale.

Aufgabe 2. An einen Punkt der Ellipse eine Normale zu ziehen.

Auflösung mit denen von Aufg. 1 gegeben.

Aufgabe 3. Von einem außerhalb der Ellipse gelegenen Punkte G die Tangente an diese Kurve zu ziehen.

Auflösung. Man schlägt mit der großen Achse den Kreis um A und mit BG einen Kreis um G, der den ersten in L und K schneidet. Darauf zieht man AL und AK, welche die Ellipse in P und Q schneiden. GP und GQ sind die Tangenten. Fig. 23.

Beweis. △ BPG ≌ △ LPG (drei Seiten =), also
∠BPG = ∠LPG.
△ BQG ≌ △ KQG, also ∠BQG = ∠KQG.

Analytischer Theil.

§ 17.

Vorausgehende Bestimmungen. Man wählt den Mittelpunkt der Ellipse zum Anfangspunkt der Coordinaten und läßt die x und y Achse mit der großen und kleinen Achse zusammenfallen. Die halbe große Achse werde mit a, die halbe kleine Achse mit b, die Excentricität mit c bezeichnet, also MC = MD = a; ME = MF = b; MA = MB = c. Man hat Fig. 24. AE = a (§ 13, Lehrs. 4), daher $a^2 = b^2 + c^2$ oder $c^2 = a^2 - b^2$.

Gleichung der Ellipse. Für den Punkt P der Ellipse sei PG = y, MG = x. Um die Gleichung zwischen y und x zu finden, geht man von der Grundeigenschaft des Punktes P aus. Danach ist AP + BP = 2a.

$$\text{Es ist aber } AP = \sqrt{y^2 + (x + c)^2};$$

$$BP = \sqrt{y^2 + (x - c)^2};$$

$$\text{also: } \sqrt{y^2 + (x + c)^2} + \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a.$$

Vertheilt man, um vortheilhafter zu quadriren, die Wurzeln auf beide Seiten der Gleichung, so ist

$$\left(\sqrt{y^2 + (x + c)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{y^2 + (x - c)^2}\right)^2,$$

woraus nach möglichster Reduction folgt

$$cx = a^2 - a \, . \sqrt{y^2 + (x - c)^2} \text{ oder}$$

$$a \, . \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = a^2 - cx.$$

Quadrirt man zum zweiten Male und ordnet die Gleichung, so wird

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\; x^2 = a^2.(a^2 - c^2).$$

Nach Obigem ist $a^2 - c^2 = b^2$, mithin

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

Dividirt man diese Gleichung durch a^2b^2, so nimmt sie eine noch einfachere Form an, nämlich $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$

Bemerkungen. Während in dem synthetischen Theil die Ellipse durch die Entfernung der Brennpunkte und die Summe der Leitstrahlen bestimmt wurde, werden für die Gleichung der Kurve die beiden Halbachsen als die gegebenen Constanten betrachtet. Für gewöhnlich ist $a > b$; es kann aber auch $a \overset{=}{<} b$ genommen werden.

Bei $a = b$ erhält man $y^2 + x^2 = a^2$, das ist die Mittelpunktsgleichung des Kreises für den Radius a; also geht die Ellipse in einen Kreis über, wenn die Achsen gleich werden. Da in diesem Fall die Excentricität $c = \sqrt{a^2 - b^2} = o$ wird, die Brennpunkte also mit dem Mittelpunkte zusammenfallen, so zeigt sich die Uebereinstimmung mit § 12.

Für $a < b$ würde die halbe große Achse mit b, die halbe kleine mit a bezeichnet und erstere mit der y, letztere mit der x Achse zusammengefallen sein.

§ 18.

Discussion der Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

1) Für $x = o$ wird $y = \pm\ b$, daraus folgt: die y Achse wird auf beiden Seiten in der Entfernung der kleinen Halbachse geschnitten.

2) Für $x = \pm\ a$ wird $y = o$, d. h.: die x Achse wird auf beiden Seiten in der Entfernung der großen Halbachse geschnitten.

3) Für $x = \pm\ m$, wobei $m < a$ ist, wird

$y = \pm\ \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - m^2}$, d. h.: zwischen den Enden der großen Achse hat die Ellipse zu beiden Seiten der x und y Achse congruente Zweige.

4) Für wachsende m wird $\sqrt{a^2 - m^2}$ immer kleiner, d. h.: die Ellipse ist in der Mitte am breitesten und nähert sich von beiden Seiten her der x Achse, bis für $x = \pm\ a$ die über und unter der Achse befindlichen Zweige in der Achse selbst sich vereinigen.

5) Für $x = \pm\ m$, wobei $m > a$ ist, wird y imaginär, d. h.: die Ellipse erstreckt sich nicht über die große Achse hinaus.

§ 19.

Umschriebener Kreis. Erklärung. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Ellipse und dem mit der großen Achse als Durchmesser construirten Kreise; dieser Kreis wird der umschriebene genannt.

Lehrsatz 1. Die Ordinaten der Ellipse verhalten sich zu den entsprechenden Ordinaten des umschriebenen Kreises $= b : a$.

Beweis. Construirt man um die große Achse als Durchmesser einen Kreis und bezeichnet die Ordinaten des Kreises zum

Unterschiede von denen der Ellipse mit Y, so erhält man für PG

Fig. 24. $$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ für RG}$$

$$Y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Mithin $y = \frac{b}{a} . Y$ oder $y : Y = b : a$.

Zusatz. Die zu gleichen Abscissen gehörigen Ordinaten aller Ellipsen, welche dieselbe große Achse haben, verhalten sich wie ihre kleinen Achsen.

Construction der Ellipse mit Hülfe des umschriebenen Kreises.

Gegeben sind die beiden Achsen.

Fig. 25. Man construirt einen Kreis um die große Achse CD als Durchmesser, zieht die Ordinaten GH, G'H' u. s. w. und schneidet von ihnen jedesmal ein Stück ab, das sich zur ganzen Ordinate verhält wie b : a. Man erreicht dies am besten dadurch, daß man auch mit der kleinen Halbachse einen Kreis um M schlägt, M mit H, H' u. s. w. verbindet und durch die Punkte K, K' u. s. w. Parallelen zu CD zieht, bis sie die Ordinaten schneiden. P, P' u. s. w. sind Punkte der Ellipse, denn

$$GP : GH = MK : MH = b : a$$
$$G'P' : G'H' = MK' : MH' = b : a \text{ u. s. w.}$$

§ 20.

Tangenten und Normalen.

Lehrsatz 1. Für je zwei Ellipsenpunkte stehen die Differenzen der Ordinaten und Abscissen in einer einfachen Beziehung zu ihren Summen.

Beweis. Seien x' und y', x'' und y'' die Coordinaten zweier Ellipsenpunkte, so gilt für dieselben die Gleichung der Ellipse; also

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \text{ und}$$
$$a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2. \text{ Durch Subtraction erhält man:}$$

$$a^2 (y'^2 - y''^2) + b^2 (x'^2 - x''^2) = o \text{ oder}$$
$$a^2 (y' - y'') (y' + y'') + b^2 (x' - x'') (x' + x'') = o$$

$$a^2 \frac{y' - y''}{x' - x''} + b^2 \frac{x' + x''}{y' + y''} = 0$$

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

Aufgabe 1. Die Gleichung der Tangente für den durch x' und y' gegebenen Punkt der Ellipse zu bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung einer Geraden, welche durch den gegebenen Punkt geht, hat die Form $y - y' = a.(x - x')$, wobei a noch beliebig ist. Jede dieser Geraden schneidet die Ellipse in zwei Punkten, nur wenn man den zweiten Durchschnittspunkt so nahe an den Punkt P gerückt denkt, daß er mit ihm zusammenfällt, bleibt bloß ein gemeinschaftlicher Punkt übrig, und die Gerade ist Tangente. Bezeichnet man den zweiten Durchschnittspunkt mit x'' y'', so muß für ihn obige Gleichung ebenfalls gelten und man erhält Fig. 26.

$$y'' - y' = a\,(x'' - x'),\ \text{also}$$

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.\ \text{Es ist hiernach}$$

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,(x - x')$$

die Gleichung einer Secante, welche durch zwei bestimmte Ellipsenpunkte geht, und sie muß zur Gleichung der Tangente werden, wenn $x'' = x'$ und $y'' = y'$ gesetzt wird. In obiger Gleichung würde zwar in diesem Fall

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{y' - y'}{x' - x'} = \frac{0}{0},$$

also unbestimmt; nach Lehrs. 1 ist aber

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'' + x'}{y'' + y'},$$

und wenn man hierin $y'' = y'$ und $x'' = x'$ werden läßt, so erhält man

$$-\frac{b^2 \,.\, 2x'}{a^2 \,.\, 2y'} = -\frac{b^2\,x'}{a^2\,y'},$$

und die Gleichung der Tangente wird

$$y - y' = -\frac{b^2\,x'}{a^2\,y'}\,(x - x').$$

Folgerung 1. Bezeichnet man den Winkel, welchen die Tangente mit der x Achse bildet, mit α, so ist

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$, und da für die Endpunkte der großen Achse $y' = o$, für die der kleinen Achse $x' = o$ wird, so ist für erstere $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{o}$ oder die Tangente $\perp$ zur x Achse, für letztere $\operatorname{tg}\alpha = o$ oder die Tangente $\#$ der x Achse.

Aufgabe 2. Die Gleichung der Normale für einen gegebenen Ellipsenpunkt zu bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung der Tangente folgt sofort die der Normale

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x').$$

Lehrsatz 2. Die halbe große Achse ist die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse des Berührungspunktes und des Durchschnittspunktes der Tangente mit der x Achse.

Fig. 26. **Behauptung.** $x' : a = a : MT$.

Beweis. Setzt man in der Gleichung der Tangente $y = o$, so wird $x = MT$, also

$-y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x')$, woraus folgt

$a^2y'^2 + b^2x'^2 = b^2x'.x$. Für x' und y' gilt auch

$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$.

Also $b^2x'.x = a^2b^2$ oder

$x'.x = a^2$ und $x' : a = a : MT$.

Lehrsatz 3. Tangenten, welche eine Ellipse und den umschriebenen Kreis in solchen Punkten berühren, deren Abscissen gleich sind, schneiden die große Achse in demselben Punkte.

Fig. 27. **Beweis.** Für die Tangente des Ellipsenpunktes P ist $MT = \frac{a^2}{x'}$ (nach vorigem Lehrs.). Für den Punkt Q des Kreises um M ist $MQ^2 = MG \,.\, MT'$ oder $a^2 = x' \,.\, MT'$, also auch $MT' = \frac{a^2}{x'}$. Hieraus folgt $MT = MT'$ und T und T' fallen zusammen.

Folgerung 2. MT ist von der kleinen Achse nicht abhängig, bleibt also dasselbe, wenn auch der Werth von b sich ändert.

Folgerung 3. Die Tangente für den Punkt P kann construirt werden, indem man die Ordinate PG bis zum umschriebenen Kreise, bis Q, verlängert, in Q die Tangente des Kreises zieht und den Durchschnittspunkt T dieser und der großen Achse aufsucht. TP ist dann Tangente der Ellipse.

§ 21.

Parallele Sehnen, conjugirte Durchmesser.

Lehrsatz 1. Die Halbirungspunkte paralleler Sehnen liegen in demselben Durchmesser.

Beweis. Für die Sehne PQ seien die Coordinaten der Endpunkte $x'y'$ und $x''y''$, für die Sehne RS seien es $x'''y'''$ und $x^{IV}y^{IV}$. Die Gleichung von PQ ist $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$. (Vergl. § 20, Aufg. 1.) Fig. 28.

Bezeichnet man den Winkel, unter welchem die Linie die x Achse schneidet mit α, so ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$. Nach § 20, Lehrs. 1 wird

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x'' + x'}{y'' + y'} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{\frac{x'' + x'}{2}}{\frac{y'' + y'}{2}}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}},$$

wobei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Coordinaten des Halbirungspunktes H sind. In gleicher Weise findet sich für RS die Gleichung $y - y''' = \frac{y^{IV} - y'''}{x^{IV} - x'''}(x - x''')$ und

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{y^{IV} - y'''}{x^{IV} - x'''} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^{IV} + x'''}{y^{VI} + y'''} =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{\frac{x^{IV} + x'''}{2}}{\frac{y^{IV} + y'''}{2}} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{\mathfrak{x}'}{\mathfrak{y}'},$$

wobei x' und y' die Coordinaten des Halbirungspunktes K sind. Da beide Sehnen als parallel gegeben sind, so wird $\alpha' = \alpha$ sein, mithin

$$- \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} \text{ und}$$

$$x : y = x' : y'.$$

Aus dieser Proportion folgt aber, daß M, H und K in einer Geraden liegen. So wie K, so muß auch der Halbirungspunkt von jeder anderen PQ parallelen Sehne in den durch H gehenden Durchmesser fallen.

Lehrsatz 2. Ist eine Tangente einer Sehne parallel, so liegt der Berührungspunkt in demselben Durchmesser, der durch den Halbirungspunkt der Sehne geht.

Fig. 28. **Beweis.** Für PQ ist $\operatorname{tg}\alpha = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$;

für die Tangente VT ist $\operatorname{tg}\alpha' = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}$,

wenn $x'y'$ die Coordinaten des Berührungspunktes sind (§ 20, Folg. 1). Da PQ ‖ VT, so ist $\alpha = \alpha'$, also

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'},$$

woraus folgt, daß V mit H in demselben Durchmesser liegt.

Lehrsatz 3 (Umkehrung). Jeder Durchmesser halbirt ein System paralleler Sehnen.

Beweis. Construirt man die Tangente für den Endpunkt des Durchmessers, so schneidet jede der Tangente parallele Sehne den Durchmesser so, daß ihr Halbirungspunkt in den Durchmesser zu liegen kommt. (Lehrs. 2.)

Anmerkung. Hierin liegt die Berechtigung, die durch M gehenden Linien Durchmesser zu nennen.

Lehrsatz 4. Zieht man zweien Sehnen, die von den Endpunkten der großen Achse nach demselben Punkte der Ellipse gehen, zwei Durchmesser parallel, so halbirt der eine von diesen die dem andern parallel laufenden Sehnen.

Fig. 29. **Voraussetzung.** QS ‖ PD
UR ‖ PC.

Beweis. QS halbirt PC, denn CK : KP = CM : MD = 1 : 1. Folglich halbirt QS alle mit CP und daher auch mit RU parallelen Sehnen. Dasselbe gilt von RU und den Sehnen, die PD und folglich auch QS ‡ sind.

Erklärung. Zwei so zusammengehörige Durchmesser, daß der eine jedesmal die dem anderen parallelen Sehnen halbirt, heißen conjugirte Durchmesser. Die Achsen sind ebenfalls conjugirte Durchmesser.

§. 22.

Flächeninhalt der Ellipse.

Lehrsatz 1. Ein von zwei Ordinaten gebildeter Streifen der Ellipse ist $\frac{b}{a}$ von dem durch dieselben Ordinaten begrenzten Streifen des umschriebenen Kreises.

Behauptung. $PGHQ = \frac{b}{a} KGHL.$

Beweis. Man zieht die Sehnen PQ und KL und berechnet den Inhalt der Trapeze PGHQ und KGHL. Fig. 30.

$$\text{Es ist Tr. } PGHQ = (PG + QH) \cdot \frac{GH}{2}$$

$$\text{Tr. } KGHL = (KG + LH) \cdot \frac{GH}{2}$$

$$\text{Also Tr. } PGHQ : \text{Tr. } KGHL = (PG + QH) : (KG + LH).$$

Nun ist nach § 19, Lehrsatz 1 $PG = \frac{b}{a} KG$ und $QH = \frac{b}{a} LH$,

$$\text{mithin: Tr. } PGHQ : \text{Tr. } KGHL = \frac{b}{a}(KG + LH) : (KG + LH)$$

$$= \frac{b}{a} : 1$$

$$= b : a$$

$$\text{und Tr. } PGHQ = \frac{b}{a} \cdot \text{Tr. } KGHL.$$

Liegen die Ordinaten sehr nahe an einander, ist der Streifen also unendlich schmal, so gehen die Sehnen PQ und KL in

ihre Bogen über, und die von der Ellipse und dem Kreise selber begrenzten Streifen stehen nach Obigem im Verhältniß von b : a.

Liegen aber die Ordinaten weiter aus einander, so kann man zwischen dieselben unendlich viel andere ziehen und dadurch den breiteren Streifen in lauter unendlich schmale zertheilen. Da alle einzelnen, durch die Ellipse begrenzten, unendlich schmalen Streifen $\frac{b}{a}$ von den durch den Kreis begrenzten sind, so ist auch die Summe der ersteren $\frac{b}{a}$ von der Summe der letzteren und $PGHQ = \frac{b}{a} KGHL$.

Lehrsatz 2. Der Flächeninhalt der Ellipse ist $= ab\,\pi$.

Beweis. Nach vorigem Satze ist ein von zwei Ordinaten begrenzter Streifen der Ellipse $\frac{b}{a}$ von dem entsprechenden Streifen des umschriebenen Kreises; in solche Streifen kann aber die ganze Ellipse zerlegt werden und es ergiebt sich daraus, daß die ganze Ellipse $\frac{b}{a}$ des umschriebenen Kreises ist. Also ist die Ellipse $= \frac{b}{a} . a^2 \pi = ab\,\pi$.

III. Von der Hyperbel.

Synthetischer Theil.

§. 23.

Erklärung 1. Die Hyperbel ist eine Kurve, deren Punkte von einem festen Kreise und einem **außerhalb** desselben liegenden Punkte gleiche Entfernung haben.

Fig. 31. Für den Kreis um A und den Punkt B sind P und P′ Punkte der Hyperbel, wenn PG = PB und P′G′ = P′B ist,

so daß die Dreiecke BPG und BP′G′ gleichschenklig sind. Man erhält in den verlängerten Radien die Punkte der Hyperbel in ununterbrochener Folge, bis die Radien durch die Punkte K und L gehen, in welchen die von B an den Kreis gezogenen Tangenten denselben berühren. Dann sind wegen der rechten Winkel bei K und L in den Verlängerungen von AK und AL keine Punkte mehr vorhanden, die von K und L einerseits und von B anderseits gleiche Entfernung hätten. Noch weniger existiren solche Punkte, wenn die Radien den Kreis über K und L hinaus schneiden. Der Hyperbelbogen bleibt also zwischen den Geraden AN und AO eingeschlossen.

Berücksichtigt man aber die Entfernungen vom Kreise auch in entgegengesetzter Richtung, in der Richtung über den Mittelpunkt A hinaus, so erhält man eine neue Folge von Hyperbelpunkten, die einen zweiten für sich bestehenden Zweig bilden. Liegt auch in der Verlängerung von AH über H hinaus kein Punkt der Hyperbel, so erhält man doch in der Richtung über A den Punkt Q, für welchen QH = QB ist; ebenso Q′, weil Q′H′ = Q′B, u. s. w.

Hiernach findet sich für jeden Punkt der Kreisperipherie mit alleiniger Ausnahme von K und L ein Hyperbelpunkt, jedoch so, daß für die Punkte G zwischen K und L ein Zweig, für die übrigen Punkte bei rückwärts gemessener Entfernung ein zweiter Zweig sich bildet.

Dieselbe Hyperbel erhält man, wenn man den Kreis um B schlägt und die Entfernungen von diesem Kreise und A aus nimmt.

Vorstehende Erörterung zeigt, daß bei der Hyperbel eine einfachere und zweckmäßigere Definition noch nöthiger ist, als es bei der Ellipse der Fall war. Sie ergiebt sich, wie folgt.

Da AP — BP = AP — PG = AG,
AP′ — BP′ = AP′ — P′G′ = AG′,
BQ — AQ = HQ — AQ = AH,
BQ′ — AQ′ = H′Q′ — AQ′ = AH′ u. s. w.
und AG = AG′ = AH = AH′ u. s. w., so folgt:

Erklärung 2. Die Hyperbel ist eine Kurve, für deren Punkte die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten constant ist.

Diese Erklärung wird fortan zu Grunde gelegt.

Fig. 34. Auch hier heißen A und B die Brennpunkte, jede Gerade, die einen Brennpunkt mit einem Punkte der Kurve verbindet, Leitstrahl (rad. vector), der Halbirungspunkt M von AB Mittelpunkt, MA und MB Excentricität, CD die Hauptachse, jede durch M gehende gerade Linie, auch wenn sie die Hyperbel nicht schneidet, Durchmesser (vergl. § 33, Lehrs. 4). Die Nebenachse ist imaginär.

Folgerung 1. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die einen gegebenen Kreis von außen oder einschließend berühren und durch einen außerhalb des Kreises gelegenen Punkt gehen, ist eine Hyperbel.

Folgerung 2. Der geometrische Ort für die Spitzen der Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und für die anderen Seiten eine gleiche Differenz haben, ist eine Hyperbel.

§ 24.

Construction der Hyperbel. a) in einem Zuge.

Fig. 32. An einem Lineal ist in H ein Faden befestigt, dessen Länge $<$ AH sein muß und in der Figur 32 $=$ GH genommen worden ist. Dabei muß AG $<$ AB sein. Das andere Ende des Fadens ist in B auf dem Papier befestigt. Indem nun das Lineal um den Punkt A gedreht und durch den Stift der Faden immer straff gehalten wird, beschreibt der Stift einen Hyperbelbogen, für welchen A und B die Brennpunkte sind und AG die constante Differenz der Leitstrahlen bezeichnet. Durch Befestigung des Fadens in A und Drehung des Lineals um B erhält man den zweiten Zweig der Hyperbel.

Beweis. Der abgelöste Theil des Fadens, PB, ist $=$ PG; demnach ist für jeden Punkt des Hyperbelbogens AP $-$ BP $=$ AP $-$ PG $=$ AG und also constant.

b) durch einzelne Punkte.

Man schlägt um die Brennpunkte A und B wiederholt Kreise mit solchen Radien, deren Länge um eine constante Größe differirt, und verbindet die solchen Kreisen angehörenden Durchschnittspunkte durch einen freien Zug. Man erhält bei derselben Zirkelöffnung jedesmal 4 Punkte der Hyperbel. Fig. 33.

§ 25.

Erklärung 1. Ein Punkt liegt außerhalb der Hyperbel, wenn beide Verbindungslinien des Punktes mit den Brennpunkten die Kurve schneiden; er liegt dagegen innerhalb des einen Zweiges, wenn die Verbindungslinie mit dem Brennpunkte dieses Zweiges die Kurve nicht schneidet.

Lehrsatz 1. Für jeden innerhalb der Hyperbel gelegenen Punkt ist die Differenz der Entfernungen größer, für jeden außerhalb gelegenen kleiner als die Differenz zweier zusammengehörigen Leitstrahlen.

a) **Voraussetzung.** $AP - BP = AG$. Fig. 34.

Behauptung. $AJ - BJ > AG$.

Beweis. $BJ < PB + PJ$,

also auch $BJ < GP + PJ$,

oder $BJ < GJ$.

Folglich $AJ - BJ > AJ - GJ$

und $AJ - BJ > AG$.

b) **Voraussetzung.** $AQ - BQ = AG$.

Behauptung. $AL - BL < AG$.

Beweis. $AL < AQ + LQ$;

also $AL - BL < AQ + LQ - BL$,

oder $AL - BL < AQ + LQ - LQ - BQ$,

oder $AL - BL < AQ - BQ$

und $AL - BL < AG$.

Ebenso kann auch bewiesen werden, daß $BL - AL < AG$ ist, da L auch außerhalb des anderen Hyperbelzweiges liegt.

Lehrsatz 2. Die Hauptachse der Hyperbel endet auf beiden Seiten gleichweit vor den Brennpunkten.

Fig. 34. **Behauptung.** AC = BD.

Beweis. AD — BD = BC — AC

oder AC + CD — BD = BD + CD — AC,

also AC — BD = BD — AC

2AC = 2BD

AC = BD.

Folgerung. Der Mittelpunkt halbirt die Hauptachse: CM = DM.

Erklärung 2. Die Endpunkte der Hauptachse C und D heißen Scheitelpunkte der Hyperbel.

Lehrsatz 3. Die Hauptachse ist gleich der Differenz zweier zusammengehörigen Leitstrahlen.

Fig. 34. **Behauptung.** AP — BP = CD.

Beweis. AP — BP = AD — BD = AD — AC (Lehrs. 2) = CD.

Lehrsatz 4. In dem Perpendikel, das man im Mittelpunkte M auf der Hauptachse errichtet, liegt kein Punkt der Hyperbel.

Beweis leicht.

§ 26.

Lehrsatz 1. Eine gerade Linie schneidet entweder die Hyperbel in zwei Punkten, oder berührt sie in einem Punkte, oder liegt ganz außerhalb derselben.

Fig. 35. **Voraussetzung 1.** Die Gerade OV schneidet die Linie AB zwischen A und B.

Beweis. Fällt man BH ⊥ OV, verlängert es um sich selbst bis G, so daß HG = BH ist, und verbindet A mit G, so ist AG die größte Differenz der Entfernungen, welche die Punkte in der Linie OV von den Brennpunkten haben. Alle Punkte von OV sind nämlich von B und G gleichweit entfernt, also ist

AK — BK = AK — GK = AG.

Dagegen AN — BN = AN — GN < AG,

AL — BL = AL — GL < AG u. s. w.

Nun können drei Fälle eintreten. Es sei die Differenz der Leitstrahlen bei der Hyperbel = d, so kann:

1) AG < d sein. Dann haben alle anderen Punkte von OV eine noch kleinere Differenz der Entfernungen; die ganze Linie OV hat keinen Punkt mit der Hyperbel gemein und liegt ganz außerhalb derselben.

2) AG = d. Dann ist AK — BK = d und K ein Punkt der Hyperbel; alle anderen Punkte von OV liegen aber außerhalb und OV ist Tangente.

3) AG > d. Dann giebt es immer zwei Durchschnittspunkte, wie aus folgenden Betrachtungen erhellt.

Errichtet man in M, dem Mittelpunkte der Hyperbel, das Perpendikel auf AB, welches OV in T schneidet, so ist AT — BT = o und ein Punkt der Hyperbel liegt daher zwischen K und T. Der andere Durchschnittspunkt kann entweder über K oder über T hinaus liegen.

Zieht man durch A eine Parallele zu OV und verlängert BG bis zu ihr, bis S, so wird, wenn d > AS ist, der zweite Punkt über K hinaus liegen; ist aber d < AS, so liegt der zweite Punkt über T hinaus.

Betrachtet man die Punkte über K hinaus, so verringert sich die Differenz der Entfernungen immer mehr, aber nur bis zu der Grenze AS. Denn

$$AN - BN = AN - QN = AQ,$$
$$AO - BO = AO - RO = AR;$$

aber AR < AP < AQ < AG. Die Differenz der Entfernungen wird immer kleiner, doch AS < AR und kleiner als jede folgende Differenz. Ein Punkt der Hyperbel kann also über K hinaus liegen, wenn d der Größe nach zwischen AG und AS fällt, sonst nicht.

Für die Punkte über T hinaus wird die Entfernung von B größer, als die von A, und die Differenz VB — VA = VG — VA = VW — VA = AW bleibt immer < AS, nähert sich aber diesem Werthe immer mehr. Es wird also der zweite Durchschnittspunkt über T hinaus fallen, wenn d < AS ist.

Voraussetzung 2. Die Gerade OV schneidet die Linie AB in ihrer Verlängerung, in K. **Fig. 36.**

Beweis. Die größte Differenz der Entfernungen ist für diesen Fall = AB; denn

$$KB - KA = AB,$$

dagegen $VB - VA < AB$,

$$LB - LA < AB \text{ u. s. w.}$$

Da die Differenz der Leitstrahlen d kleiner als AB sein muß, so treten die Fälle nicht ein, daß OV ganz außerhalb der Hyperbel läge oder dieselbe nur berührte, sondern es giebt immer zwei Durchschnittspunkte.

Schneidet das in M auf AB errichtete Perpendikel die Linie OV in T, so ist für den Punkt T die Differenz der Entfernungen = 0 und es muß also ein Punkt der Hyperbel zwischen K und T liegen. Der zweite Punkt liegt entweder über K oder über T hinaus.

Für die über K hinaus liegenden Punkte bleibt die Differenz der Entfernungen > AS, wenn AS ∥ OV und BS ⊥ AS gezogen ist. Es liegt also der zweite Durchschnittspunkt über K hinaus, wenn AB > d > AS. Wenn aber d < AS, so liegt er über T hinaus, weil in dieser Strecke die Differenz der Entfernungen von 0 bis AS wächst und also dann ein Punkt der Hyperbel darin liegen muß.

§ 27.

Lehrsatz 1. Der von der Hyperbel begrenzte Theil eines Durchmessers wird im Mittelpunkte halbirt.

Fig. 37. **Behauptung.** PM = QM.

Lehrsatz 2. Alle auf der verlängerten Hauptachse senkrechten Sehnen werden durch diese Achse halbirt.

Lehrsatz 3. Die zu beiden Seiten der verlängerten Hauptachse liegenden Theile der Hyperbel sind congruent.

Lehrsatz 4. Alle der Hauptachse parallelen Sehnen werden durch das im Mittelpunkte auf der Hauptachse errichtete Perpendikel halbirt.

Fig. 37. **Behauptung.** HR = HS.

Lehrsatz 5. Die beiden getrennten Zweige der Hyperbel sind congruent.

Die Beweise dieser Lehrsätze stimmen fast vollständig mit denen von § 14, Lehrs. 2—6 überein.

§. 28.

Lehrsatz 1. Werden die Winkel, welche zwei zusammengehörige Leitstrahlen mit einander bilden, halbirt, so erhält man Tangente und Normale des Hyperbelpunktes.

Voraussetzung. $\angle$ APT = $\angle$ BPT, Fig. 38.
$\angle$ BPN = $\angle$ NPL.

Behauptung. PT ist Tangente und PN Normale.

Beweis. Zieht man BJ $\perp$ TH und verlängert es, bis es AP in G schneidet, so ist $\triangle$ BJP $\cong$ $\triangle$ GJP; denn PJ = PJ, $\angle$ BJP = $\angle$ GJP = R und $\angle$ BPJ = $\angle$ GPJ nach Voraussf. Also GJ = BJ und G ist der Punkt, von welchem alle Punkte in HT dieselbe Entfernung haben, wie von B. Daraus folgt AG = AP — BP = der Differenz der Leitstrahlen. Von allen Punkten in HT außer P ist die Differenz der Entfernungen von A und B < AG; also liegt P allein in der Hyperbel, alle anderen Punkte von HT liegen außerhalb derselben (§ 26, Lehrs. 1) und HT ist Tangente, also auch PN Normale.

Anmerkung. Alle Wärmestrahlen (Licht-, Schallstr.), die von einem der Brennpunkte aus auf eine hyperbolisch geformte Fläche fallen, werden so reflectirt, als wären sie von dem anderen Brennpunkte ausgegangen.

Lehrsatz 2. Tangente und Normale schneiden die Hauptachse und deren Verlängerung so, daß die Entfernungen der Durchschnittspunkte von den Brennpunkten sich wie die Leitstrahlen des Berührungspunktes verhalten.

Behauptung. 1) AT : BT = AP : BP, Fig. 38.
3) AN : BN = AP : BP.

Beweis. Für 1) sofort ersichtlich.
Für 2) ist zu berücksichtigen, daß BG ⫲ NP ist, woraus AN : BN = AP : GP = AP : BP folgt.

Folgerung. A, B, T und N sind vier harmonische Punkte.

§ 29.

Aufgabe 1. An einen Punkt der Hyperbel eine Tangente zu ziehen.

Auflösungen nach § 16, Aufg. 1.

Aufgabe 2. An einen Punkt der Hyperbel eine Normale zu ziehen.

Fig. 39. **Aufgabe 3.** Von einem außerhalb der Hyperbel gelegenen Punkte L die Tangenten an diese Kurve zu ziehen.

Auflösung. Man schlägt mit der großen Achse CD Kreise um A und B, sodann um L erstens einen Kreis mit AL, der den Kreis um B in H und H' und zweitens einen Kreis mit BL, der den Kreis um A in G und G' schneidet. Dann zieht man AG und AG', außerdem BH und BH', bis sie sich in den Hyperbelpunkten P und Q schneiden, verbindet L mit P und Q und erhält in LP und LQ die verlangten Tangenten.

Beweis. $\triangle$ AGL $\cong$ $\triangle$ BH'L; denn AL = H'L, GL = BL und AG = BH'; mithin $\angle$ AGL = $\angle$ H'BL. Wegen GL = BL ist auch $\angle$ LGB = $\angle$ LBG, daher auch $\angle$ PGB = $\angle$ PBG und GP = BP. Hieraus folgt zunächst, daß AP — BP = AG und P, der Durchschnittspunkt von AG und BH', ein Punkt der Hyperbel ist. Dann aber folgt $\triangle$ PGL $\cong$ $\triangle$ PBL (drei Seiten); also $\angle$ GPL = $\angle$ BPL und somit PL Tangente.

Ebenso kann der Beweis für QL geführt werden.

Anmerkung. Construction und Beweis für Aufg. 3 sind zwar einfacher, wenn man nur AG und AG' bis zum Durchschnitt mit der Hyperbel in P und Q verlängert; indeß liegen diese Durchschnittspunkte öfters zu fern, als daß man die Linien bis zu ihnen hin ziehen könnte. In dem Falle lassen sich mit Zuziehung von BH und BH' die Tangenten doch construiren, wenn man auch die Durchschnittspunkte von AG und BH' einerseits und von AG' und BH andrerseits nicht benutzen kann. (Vergl. Kambly: Planimetrie, S. 92, Aufg. 11.)

Lehrsatz. Zieht man die Tangenten vom Mittelpunkt aus, so laufen sie bis in's Unendliche, ohne daß die Berührung wirklich erfolgt.

Beweis. Man schlägt (wie bei Aufg. 3) mit der großen Achse CD Kreise um A und B, sodann um M einen Kreis mit MA oder MB, welcher den Kreis um A in G und G' und den um B in H und H' schneidet. Zieht man dann AG und BH', so schneiden sich dieselben nicht, sondern laufen parallel; denn ∠ AGB = R als Winkel im Halbkreis, und da ∠ P''BG = ∠ P'GB, so auch ∠ P''BG = R. Zieht man zu diesen Linien durch M die Parallele MP, so trifft dieselbe weder nach P, noch nach R hin verlängert jemals die Hyperbel. Denn jeder Punkt P dieser Linie bleibt außerhalb der Kurve, da (wegen Gleichheit von BJ und GJ) AP — BP = AP — GP < AG. Fig. 40.

Aehnlich findet man die zweite Linie QS.

Folgerung. Die Hyperbelzweige erstrecken sich nicht über ∠ PMS und QMR hinaus.

Erklärung. PR und QS heißen Asymptoten der Hyperbel, weil sie, bis in's Unendliche verlängert, doch nicht mit der Kurve zusammenfallen.

Analytischer Theil.

§ 30.

Gleichung der Hyperbel. Man wählt, wie bei der Ellipse, den Mittelpunkt M zum Anfangspunkt der Coordinaten, läßt die x Achse mit der Hauptachse der Hyperbel zusammenfallen und nimmt senkrecht darauf die y Achse. Die halbe große Achse bezeichnet man mit a, die Excentricität mit c; also MC = MD = a, MA = MB = c. Für den Punkt P der Hyperbel sei PG = y, MG = x und nach der Grundeigenschaft der Kurve ist Fig. 41.

$$AP - BP = 2a,$$

oder $$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} - \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a.$$

Durch eine gleiche Umformung wie bei der Ellipse erhält man

$$a^2y^2 - (c^2 - a^2)\,x^2 = -\,a^2\,(c^2 - a^2).$$

Da $c > a$, so ist $c^2 - a^2$ positiv und kann $= b^2$ gesetzt werden. Dann ergiebt sich

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$$

oder, durch a^2b^2 dividirt,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = - 1$$

als Mitelpunktsgleichung der Hyperbel.

Bemerkungen. 1) Schlägt man mit c einen Kreis um D, der die y Achse in E und F schneidet, so ist

$$EM^2 = FM^2 = c^2 - a^2,$$

also $EM = FM = b$.

Man nennt EF die Nebenachse der Hyperbel.

2) Sind die Achsen einander gleich, also $b = a$, so erhält man die gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung $y^2 - x^2 = - a^2$ ist, und die sich zu den übrigen Hyperbeln ebenso verhält, wie der Kreis zu den Ellipsen.

3) Wird in der Gleichung der Ellipse die Achse b imaginär, also $= b\sqrt{-1}$ gesetzt, so erhält man die Gleichung der Hyperbel.

§ 31.

Discussion der Gleichung $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$.

1) Für $x = 0$ wird $y = \pm b\sqrt{-1}$; daraus folgt: In der y Achse liegt kein Punkt der Hyperbel, der Werth von y bezeichnet die imaginäre Nebenachse.

2) Für $x = \pm a$ wird $y = 0$; d. h.: Die x Achse wird auf beiden Seiten in der Entfernung der halben Hauptachse geschnitten.

3) Für $x = \pm m$, so lange $m < a$ ist, behält $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{m^2 - a^2}$ einen imaginären Werth; d. h.: Soweit die Hauptachse reicht, liegen keine Punkte der Hyperbel.

4) Für $x = \pm m$, wobei $m > a$, ist y immer reell, d. h.: Von den Enden der großen Achse (den Scheitelpunkten) an setzt sich die Kurve nach beiden Seiten hin gleichmäßig fort und bildet über und unter der x Achse congruente Zweige.

5) Für wachsende m wird $\sqrt{m^2 - a^2}$ immer größer; d. h.: Die Hyperbel entfernt sich sowohl von der x Achse, als von der y Achse nach beiden Seiten hin immer mehr.

6) Für $x = \pm \infty$ wird auch $y = \pm \infty$; d. h.: Die Entfernungen der Hyperbelzweige von beiden Coordinaten-Achsen wachsen bis in's Unendliche.

§ 32.

Lehrsatz 1. Tangenten und Normalen. Für je zwei Hyperbelpunkte stehen die Differenzen der Ordinaten und Abscissen in einer einfachen Beziehung zu ihren Summen.

Beweis wie § 20, Lehrs. 1. — Sind x' und y', x'' und y'' die Coordinaten zweier Hyperbelpunkte, so gilt für dieselben die Gleichung

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x' + x''}{y' + y''},$$

mögen beide Punkte demselben Hyperbelzweige oder verschiedenen Zweigen angehören.

Aufgabe 1. Die Gleichung der Tangente für den durch x' und y' bezeichneten Punkt der Hyperbel zu bestimmen.

Auflösung wie § 20, Aufg. 1.

Als Gleichung einer Secante, die durch zwei Hyperbelpunkte geht, findet man

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x')$$

oder nach Lehrs. 1

$$y - y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x' + x''}{y' + y''} (x - x')$$

und hiernach als Gleichung der Tangente

$$y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x').$$

Folgerung 1. Bezeichnet man den Winkel, welchen die Tangente mit der x Achse bildet, mit α, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$. Für die Scheitelpunkte C und D, deren Coordinaten $x' = \pm a$,

$y' = o$ sind, wird $tg\alpha = \frac{1}{o}$, also stehen ihre Tangenten senkrecht auf der x Achse.

Zusatz 1. Die Tangente eines unendlich entfernten Punktes der Hyperbel geht durch den Mittelpunkt.

Beweis. Die Gleichung der Tangente läßt sich folgendermaßen umformen:

$$a^2yy' - a^2y'^2 = b^2xx' - b^2x'^2$$

$$\text{oder } a^2yy' - b^2xx' = a^2y'^2 - b^2x'^2 = - a^2b^2$$

(mit Berücksichtigung der Gleichung der Hyperbel)

$$\text{und } a^2y\,\frac{y'}{x'} - b^2x = - \frac{a^2b^2}{x'},$$

$$\text{wobei } \frac{y'}{x'} = \pm \frac{\frac{b}{a}.\sqrt{x'^2 - a^2}}{x'}$$

$$= \pm \frac{b}{a}.\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}} \text{ ist.}$$

Nimmt man nun x' unendlich groß, so wird $\frac{y'}{x'} = \pm \frac{b}{a}$ und die Gleichung der Tangente wird

$$a^2y.\left(\pm \frac{b}{a}\right) - b^2x = o, \text{ woraus}$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\,x \text{ hervorgeht.}$$

Letztere Gleichung bezeichnet aber zwei gerade Linien, die durch den Mittelpunkt gehen.

Zusatz 2. Die durch die Gleichungen $y = \pm \frac{b}{a}.x$ bezeichneten Geraden sind die Asymptoten der Hyperbel.

Fig. 40. **Beweis.** In Fig. 40 waren PR und QS die Asymptoten der Hyperbel (§ 29, Erklär.). Da △ MJB rechtwinklig, $MJ = \frac{1}{2}\,AG = a$, $MB = c$ und $BJ = \sqrt{c^2 - a^2} = b$

ist, so erhält man $\text{tg JMB} = \frac{BJ}{MJ} = \frac{b}{a}$. Die Gleichung der Geraden PR ist mithin $y = \frac{b}{a} x$;

Die Gleichung von QS ist $y = -\frac{b}{a} x$.

Die Asymptoten haben also die Gleichungen $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Folgerung 2. Für die gleichseitige Hyperbel sind die Gleichungen der Asymptoten $y = + x$ und $y = - x$. Die Asymptoten schneiden also die Achsen unter Winkeln von 45^0 und sich selber rechtwinklig.

Aufgabe 2. Die Gleichung der Normale für einen gegebenen Hyperbelpunkt zu bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung der Tangente folgt sofort die der Normale

$$y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x').$$

§ 33.

Parallele Sehnen, conjugirte Durchmesser.

Lehrsatz 1. Die Halbirungspunkte paralleler Sehnen liegen in demselben Durchmesser.

Beweis. Wie bei der Ellipse (§ 21, Lehrs. 1) findet Fig. 42.
sich für $\angle \alpha$, den PQ (P′Q′) mit der x Achse bildet,

$\text{tg}\alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ und mit Anwendung von § 32, Lehrs. 1

$$\text{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\frac{x'' + x'}{2}}{\frac{y'' + y'}{2}} = \frac{b^2}{a^2} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}},$$

wobei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Coordinaten des Halbirungspunktes H (H′) sind.

Desgleichen ist für RS (R′S′)

$$\text{tg}\alpha = \frac{y^{IV} - y'''}{x^{IV} - x'''} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^{IV} + x'''}{y^{IV} + y'''} = \frac{b^2}{a^2} \frac{\mathfrak{x}'}{\mathfrak{y}'},$$

wobei $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ die Coordinaten des Halbirungspunktes K (K') sind.

Also, da $\alpha = \alpha'$ ist,

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\mathfrak{x}'}{\mathfrak{y}'}$$

und $\mathfrak{x} : \mathfrak{y} = \mathfrak{x}' : \mathfrak{y}'$.

Hieraus folgt, daß M, H und K (M, H' und K') in einer Geraden liegen; mithin liegen alle PQ (P'Q') parallelen Sehnen mit ihren Halbirungspunkten in dem durch H (H') gehenden Durchmesser oder werden sämmtlich von ihm halbirt.

Lehrsatz 2. Ist eine Tangente einer Sehne parallel, so liegt der Berührungspunkt in demselben Durchmesser, der durch den Halbirungspunkt der Sehne geht.

Fig. 42. **Beweis.** Für PQ war $tg\alpha = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$ (Lehrs. 1)

für die Tangente VT ist $tg\alpha = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}$ (§ 32 Folg. 1),

wobei x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Also, da $\alpha = \alpha'$ ist,

$$\mathfrak{x} : \mathfrak{y} = x' : y'$$

und der Berührungspunkt V liegt in demselben Durchmesser, der durch H geht.

Lehrsatz 3. Zieht man zweien Sehnen, die von den Endpunkten der großen Achse nach demselben Punkte der Hyperbel gehen, zwei Durchmesser parallel, so halbirt der eine von diesen die dem anderen parallel laufenden Sehnen.

Fig. 43. **Voraussetzung.** QS $\#$ PC,

RU $\#$ PD.

Beweis. QS halbirt CD, also auch PD, also alle PD parallelen Sehnen. RU halbirt CP und alle CP parallelen Sehnen.

Erklärung. QS und RU sind *conjugirte Durchmesser der Hyperbel.* (Vergl. § 21, Erklär.)

Folgerung 1. Die Achsen sind conjugirte Durchmesser, die Asymptoten nicht.

Lehrsatz 4. *Jeder Durchmesser halbirt ein System paralleler Sehnen.*

Beweis. Zu jedem Durchmesser kann man von C aus eine parallele Sehne ziehen und zieht man dann von D aus eine zweite Sehne nach demselben Punkt der Hyperbel, den die erste trifft, so wird letztere Sehne und mithin jede ihr parallele von dem gegebenen Durchmesser halbirt.

§ 34.

Asymptoten.

Aufgabe. Die Asymptoten einer gegebenen Hyperbel zu construiren.

Auflösung. Die Gleichungen der Asymptoten sind Fig. 44.

$$y = + \frac{b}{a} . x \text{ und } y = - \frac{b}{a} . x.$$

Man errichtet also in D das Perpendikel, macht DH = DK = b und zieht die Asymptoten MH und MK.

Lehrsatz. Die Hyperbel nähert sich den Asymptoten immer mehr, fällt jedoch nie mit ihnen zusammen.

Beweis. Zieht man für einen Punkt P der Hyperbel Fig. 44. die Ordinate PL = y, verlängert sie bis zur Asymptote und bezeichnet die Ordinate QL mit y′, so findet sich, daß der Unterschied beider Ordinaten, PQ oder y′ — y, immer kleiner wird, je weiter der Punkt P fortrückt, doch nie in Null übergeht.

Es ist nämlich für den Punkt Q

$$y' = \frac{b}{a} x, \text{ also } ay' = bx \text{ und}$$

$a^2y'^2 = b^2x^2$. Für P giebt die Gleichung der Hyperbel

$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2$, also subtrahirt:

$$a^2 (y'^2 - y^2) = a^2b^2 \text{ oder}$$

$$y'^2 - y^2 = b^2$$

$$(y' - y)(y' + y) = b^2 \text{ und}$$

$$y' - y = \frac{b^2}{y' + y}.$$

Dieser Werth von $y' - y$ wird aber immer kleiner, je größer y′ und y werden, geht jedoch nie in Null selbst über.

IV. Von den Durchschnittsfiguren des Kegels.

§ 35.

Die Kegelfläche sei dadurch entstanden, daß von zwei sich unter einem spitzen Winkel schneidenden Geraden die eine als Erzeugende um die andere als Achse gedreht worden ist und beide dabei stets denselben Winkel mit einander gebildet haben. Die bewegte Linie beschreibt den Kegelmantel, und da die Linien unendlich lang gedacht werden, so bilden sie zwei mit den Spitzen zusammenstoßende Kegelflächen gewöhnlicher Art.

Lehrsatz 1. Jede durch die Spitze gelegte Ebene hat mit der Kegelfläche entweder nur einen Punkt, die Spitze, oder nur eine Linie oder zwei sich schneidende Linien gemein.

Beweis. Eine durch die Spitze gelegte Ebene wird entweder von der Erzeugenden bei ihrer Drehung außer in der Spitze selbst nicht weiter getroffen; oder die Erzeugende liegt ihrer ganzen Länge nach einmal in der Ebene, wobei die Ebene Tangentialebene der Kegelfläche wird; oder die Erzeugende fällt zweimal in die Ebene, indem die Kegelfläche von der Ebene geschnitten wird. Dreimal kann die Erzeugende nicht in dieselbe Ebene fallen, weil es dann drei gerade Linien in einer Ebene gäbe, die mit einer anderen Linie, der Achse, gleiche Winkel bildeten, was nur dann der Fall sein könnte, wenn die Achse auf der Ebene und damit auch auf der Erzeugenden senkrecht stände. (Vergl. Kambly: Stereom. Aufg. 4.)

Lehrsatz 2. Steht eine Ebene senkrecht auf der Achse, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis.

Folgerung. Der entstandene Doppelkegel ist ein gerader Kegel.

Lehrsatz 3. Wird die Achse von einer Ebene unter demselben Winkel geschnitten, den die Achse mit der erzeugenden Linie bildet, so ist die Durchschnittsfigur eine Parabel.

Beweis. GSH sei die Ebene, in welche der Neigungswinkel der Achse SN gegen die schneidende Ebene CJK fällt. Fig. 45. $\angle$ SLC ist also der Neigungswinkel, und da derselbe so groß ist wie $\angle$ LSH, so ist SH ⫲ CJ und daher auch SH ⫲ Ebene CJK. Die Ebene CJK muß auf der Ebene des Neigungs-Winkels, mithin auf Ebene GSH senkrecht stehen. Man sucht nun die Gleichung der Durchschnittsfigur zu bestimmen. Der Anfangspunkt der Coordinaten sei C, die x Achse CX, die y Achse senkrecht CX in der Ebene CJK. Die Ordinate irgend eines Punktes K der Durchschnittsfigur erhält man, indem man durch K eine Ebene senkrecht zur Achse SN legt. Dieselbe schneidet den Kegel in einem Kreise GHK, ferner die Ebene GSH in dem Durchmesser GH und die durch den Kegel gelegte Ebene CJK in JK. Da die Ebene CJK und GHK beide senkrecht auf GSH sind, so ist auch ihre Durchschnittslinie JK $\perp$ GSH und mithin $\perp$ CJ und $\perp$ GH.

Weil KJ $\perp$ CJ, so sind KJ und CJ zwei zusammengehörige Coordinaten und KJ = y, CJ = x.

Weil zugleich KJ $\perp$ GH im Kreise GHK, so ist

$$KJ^2 = GJ \,.\, JH \text{ oder}$$
$$y^2 = GJ \,.\, JH.$$

Zieht man CR $\perp$ SN, daher ⫲ GH, so ist JH = CR, also unveränderlich, wo auch der Punkt K liegt. GJ ändert sich. Zur Bestimmung seines Werthes berücksichtige man, daß $\triangle$ GCJ $\sim$ $\triangle$ CSR, daß also GJ : x = CR : CS und $GJ = \frac{CR}{CS}\, x$. Setzt man die Werthe von GJ und JH ein, so ergiebt sich

$$y^2 = \frac{CR^2}{CS}\, x.$$

Da $\frac{CR^2}{CS}$ ein gegebener constanter Werth ist, so kann er $= p$ gesetzt werden und man erhält

$y^2 = px$, die Gleichung einer Parabel.

Fig. 45. **Zusatz 1.** Der Brennpunkt der Parabel liegt in dem Punkte B, in welchem CJ von dem Kreise berührt wird, der CJ, CS und SH berührt.

Beweis. Da SE und CE winkelhalbirende Transversalen sind, so ist E der Mittelpunkt des CJ, CS und SH berührenden Kreises, und fällt man von E eine Senkrechte EB auf CJ, so ist B Berührungspunkt des Kreises.

Da nun $\triangle CEB \sim \triangle CES$, so hat man

$$CB : CE = CE : CS$$

oder $CB : \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} CR : CS$

oder $CB = \frac{1}{4} \frac{CR^2}{CS}$

und $CB = \frac{1}{4} p.$

Also ist B der Brennpunkt der Parabel nach § 7.

Lehrsatz 4. Wird die Achse von einer Ebene unter einem größeren Winkel geschnitten, als der ist, den die Achse mit der erzeugenden Linie bildet, so ist die Durchschnittsfigur eine Ellipse.

Fig. 46. **Beweis.** $\angle SLC$ ist wieder der Neigungswinkel der Achse gegen die schneidende Ebene; da aber $\angle SLC > \angle LSH$, so schneidet CL auch SD in D. Wie Lehrs. 3 ist wieder $JK = y$, $CJ = x$ und

$$JK^2 = GJ \,.\, JH \text{ oder}$$

$$y^2 = GJ \,.\, JH.$$

GJ und JH sind beide veränderlich. Bezeichnet man CD mit 2a und zieht CR und DQ ⫲ GH, so findet man

$$GJ : x = QD : 2a \text{ oder } GJ = \frac{QD}{2a} x$$

$$JH : (2a - x) = CR : 2a \text{ oder } JH = \frac{CR}{2a} (2a - x).$$

Setzt man ein, so erhält man

$$y^2 = \frac{CR \,.\, DQ}{4a^2} \,.\, x\,(2a - x).$$

Diese Gleichung wird weiter umgeformt. Bezeichnet man die zum Halbirungspunkt von CD, zu $x = a$, gehörende Ordinate mit b, so erhält man

$$b^2 = \frac{CR \,.\, DQ}{4}$$

und die Gleichung der Durchschnittsfigur wird, wenn man b^2 in dieselbe einführt,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \,.\, x\,(2a - x) = \frac{b^2}{a^2}\,(2ax - x^2).$$

Diese Gleichung ist die Gleichung einer Ellipse, aber die Scheitelgleichung, weil der Anfangspunkt der Coordinaten in einem Scheitelpunkte liegt. Um sie zur Mittelpunktsgleichung zu machen, muß der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt M übertragen werden. Geschieht dies, so wird

$$CJ = CM + MJ \text{ oder } x = a + x'$$

gesetzt. Obige Gleichung wird in Folge dieser Substitution

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(2a\,[a + x'] - [a + x']^2)$$

und giebt bei gehöriger Umformung und indem man für x' wieder x setzt, die neuen x aber von M aus abmißt,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

die Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

Zusatz 2. DR, das zwischen den Parallelen CR und DQ liegende Stück der Kegelseite, ist so groß, wie die Entfernung der beiden Brennpunkte der Ellipse von einander. Fig. 47.

Beweis. Man fällt von R und C die Perpendikel auf DQ; dann ergiebt sich

$$\text{aus } \triangle\, DRT : RT^2 = DR^2 - DT^2$$
$$\text{und aus } \triangle\, DCP : CP^2 = DC^2 - DP^2$$

$$RT = CP, \text{ also auch } DR^2 - DT^2 = DC^2 - DP^2$$
$$\text{oder } DR^2 = DC^2 - (DP^2 - DT^2)$$
$$= DC^2 - (DP + DT)\,(DP - DT)$$
$$= DC^2 - DQ \,.\, CR.$$

Es ist aber $DC^2 = (2a)^2$ und $DQ . CR = (2b)^2$ (Lehrs. 4),

also $DR^2 = (2a)^2 - (2b)^2$,

mithin $DR^2 = (2c)^2$, wenn, wie früher, die Excentricität mit c bezeichnet wird,

und $DR = 2c$.

Fig. 47. **Zusatz 3.** Construirt man den in $\triangle$ CDS eingeschriebenen Kreis, so berührt er CD in dem einen Brennpunkte der Ellipse.

Beweis. Der Kreis berührt die Seiten des Dreiecks in den Punkten A, V und W.

Da $DA = DW = DR + RW$, so erhält man

$$DR = DA - RW = DA - CV = DA - CA.$$

Schneidet man ein Stück $DB = CA$ von DA ab, so bleibt $AB = DR$, also nach Zus. 2

$$AB = 2c.$$

Wenn aber AB gleich der doppelten Excentricität ist, so sind A und B die Brennpunkte der Ellipse.

Lehrsatz 5. Wird die Achse des Kegels von einer Ebene unter einem kleineren Winkel geschnitten, als der ist, den die Achse mit der erzeugenden Linie bildet, so ist die Durchschnittsfigur eine Hyperbel.

Fig. 48. **Beweis.** Der Neigungswinkel SLC ist $< \angle$ SLH, daher schneiden sich CL und SH in der Verlängerung über C und S hinaus in D, und die Durchschnittsfigur besteht aus zwei Zweigen, die in den entgegengesetzten Theilen des Doppelkegels liegen. Der Anfangspunkt der Coordinaten sei wieder C, $CJ = x$, $JK = y$ und es ist wieder, wie in den früheren Fällen

$$y^2 = GJ . JH.$$

Bezeichnet man wieder das gegebene Stück CD mit 2a und zieht CR und DQ ∦ GH, so erhält man aus $\triangle GJC \sim \triangle DQC$.

$$GJ : x = DQ : 2a \text{ und aus } \triangle DJH \sim \triangle DCR$$

$$JH : (2a + x) = CR : 2a.$$

Daraus folgt $GJ = \frac{DR}{2a} x$ und $JH = \frac{CR}{2a} (2a + x)$

und eingesetzt

$$y^2 = \frac{DQ . CR}{4a^2} (2ax + x^2).$$

Setzt man Rechteck $\frac{DQ\ .\ CR}{4} = b^2$, so wird

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Dies ist die Scheitelgleichung der Hyperbel; um sie in die Mittelpunktsgleichung zu verwandeln, muß der Anfangspunkt der Coordinaten nach M, dem Halbirungspunkt von CD, fortgerückt und $x = x' - a$ gesetzt werden. Durch diese Substitution wird

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a\,[x' - a] + [x' - a]^2)$$

und daraus, indem man für x' wieder x setzt,

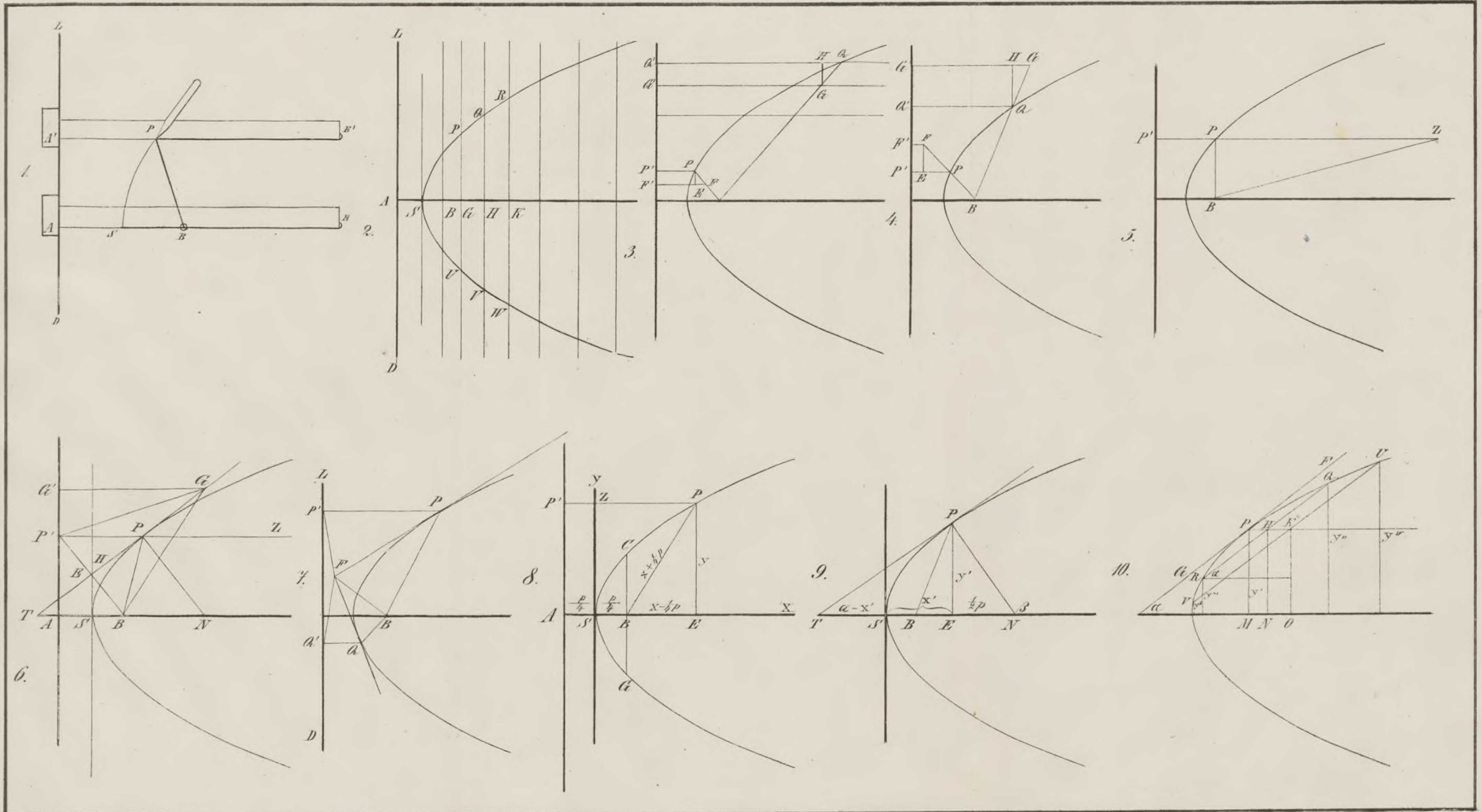
$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$$

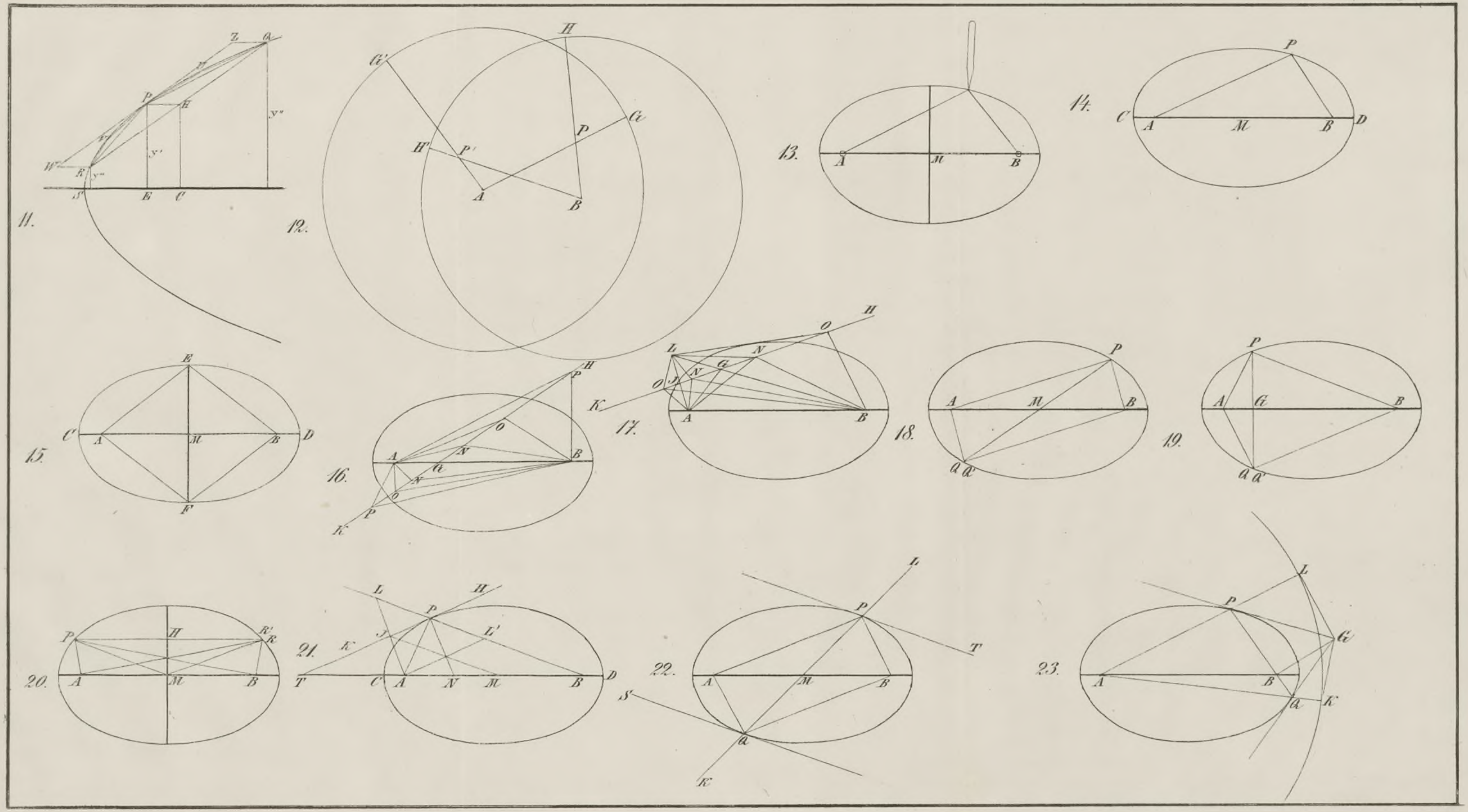
die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel.

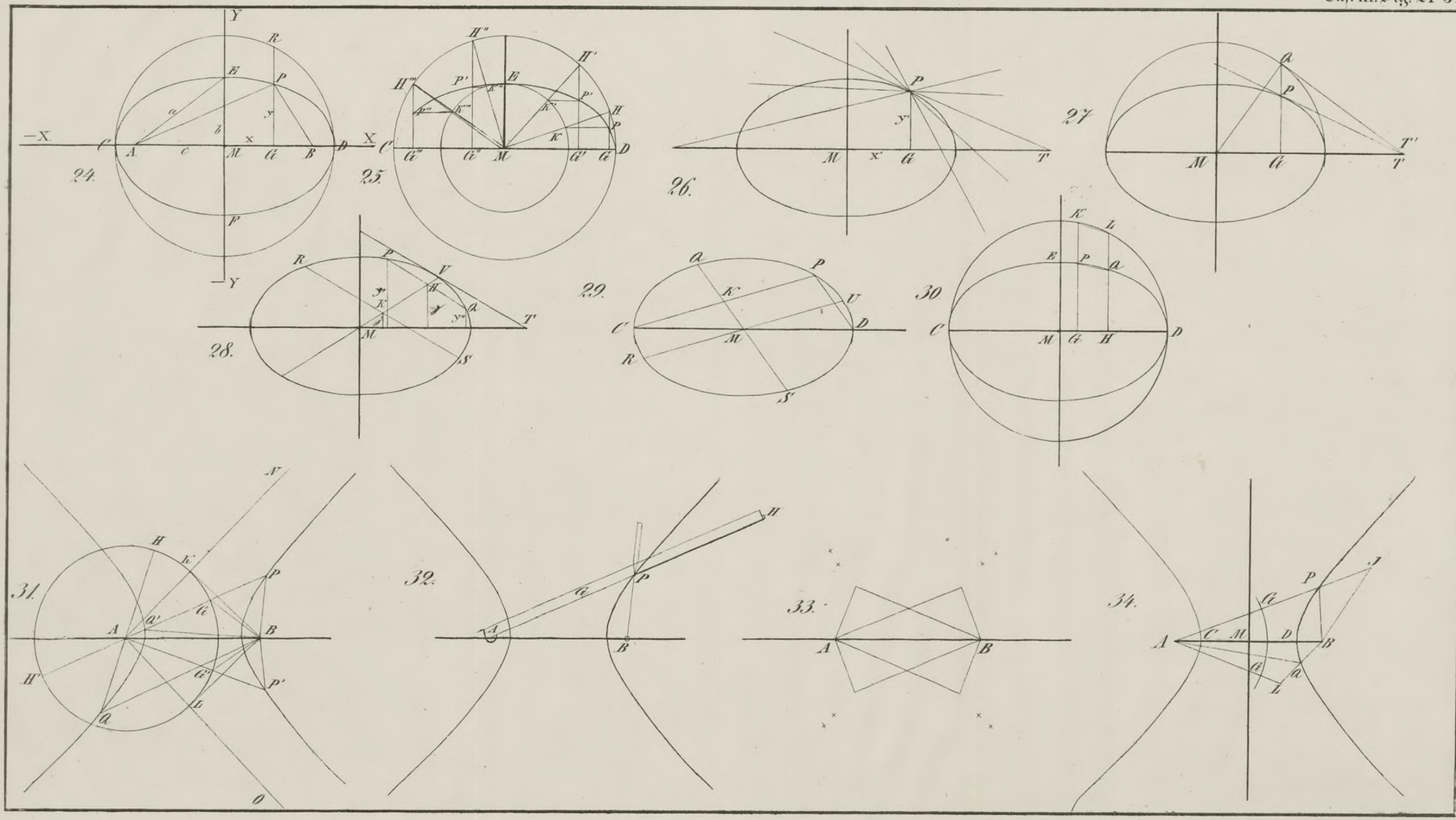
Zusatz 4. DR ist gleich der Entfernung der Hyperbel-Brennpunkte von einander.

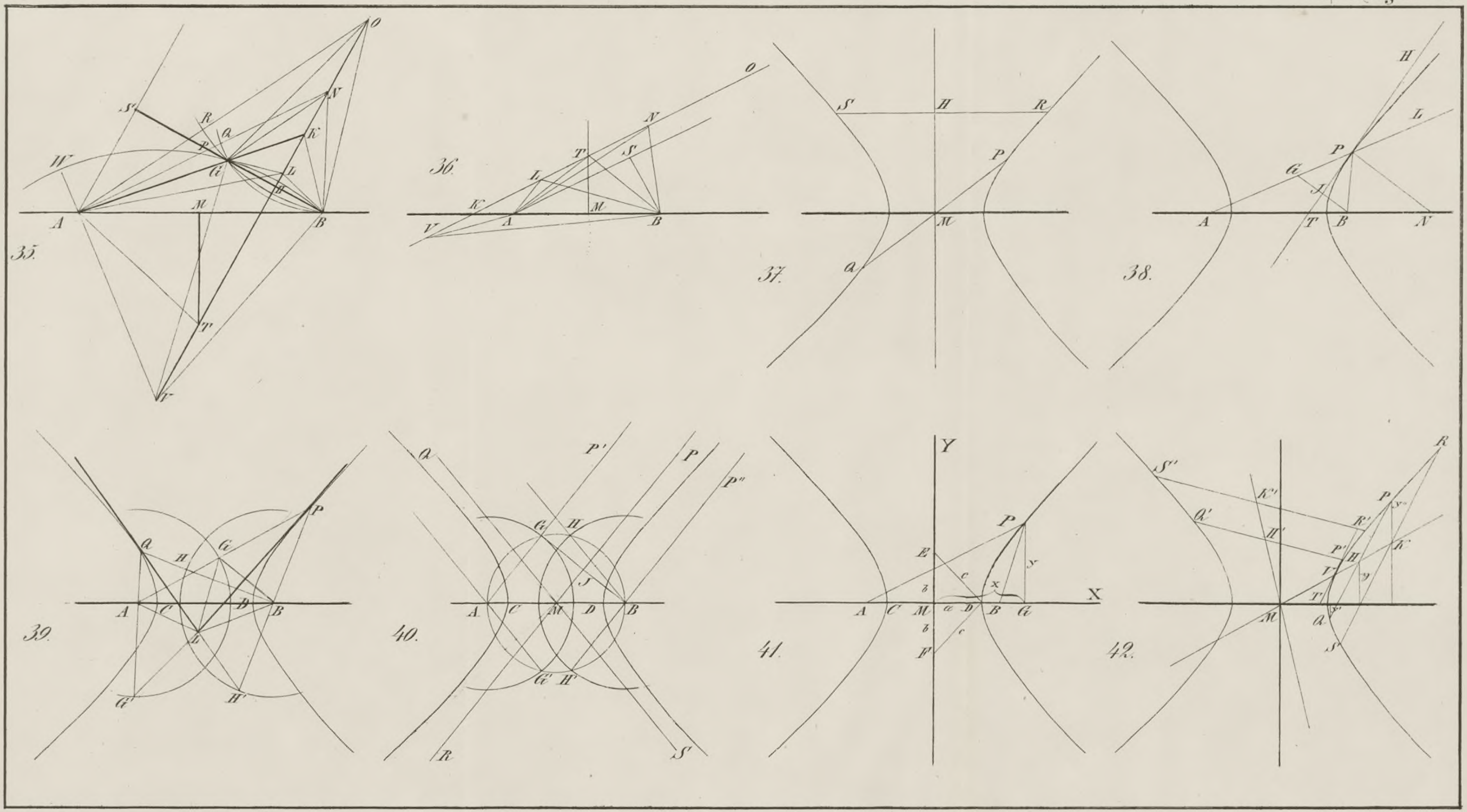
Zusatz 5. Construirt man innerhalb des Kegels die Kreise, die CJ, CS und SH berühren, so sind die Berührungspunkte, die in der Linie CJ liegen, die Brennpunkte der Hyperbel.

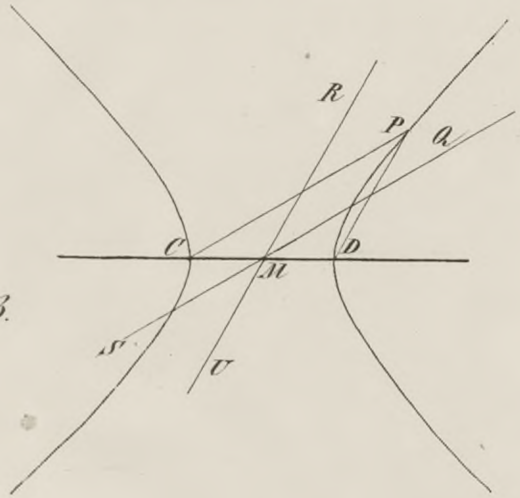
Zusatz 6. Lehrs. 3, 4 und 5 lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Wird ein Kegel parallel einer seiner Seiten von einer Ebene geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur eine Parabel; werden alle Seiten des Kegels auf einer Seite der Spitze geschnitten, so erhält man eine Ellipse; werden sie dagegen zum Theil in ihrer Verlängerung geschnitten, so entsteht eine Hyperbel. —



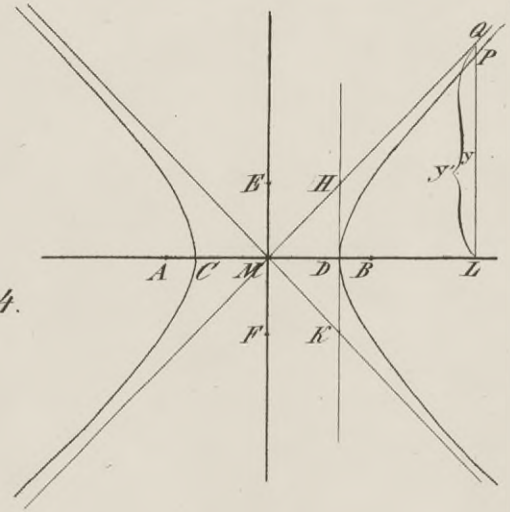

11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.


24.
25.
26.
27
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.

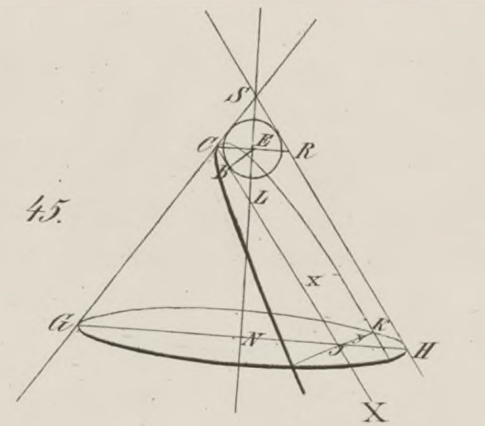

35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
Y
X



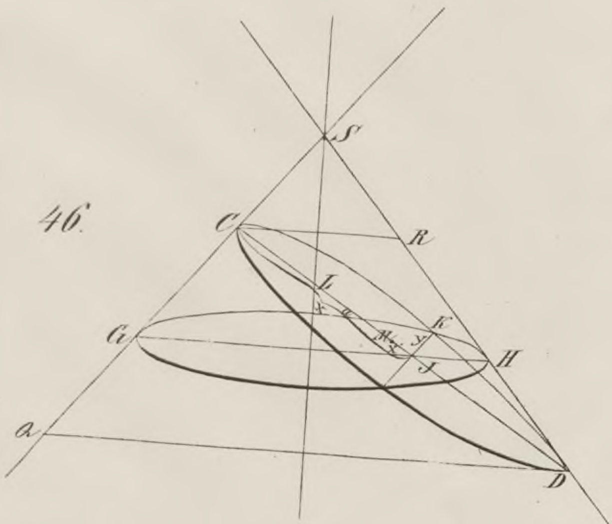
43.



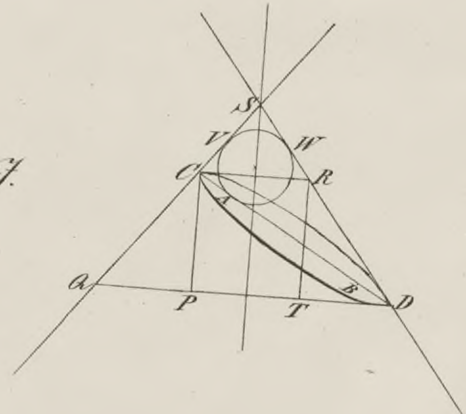
44.



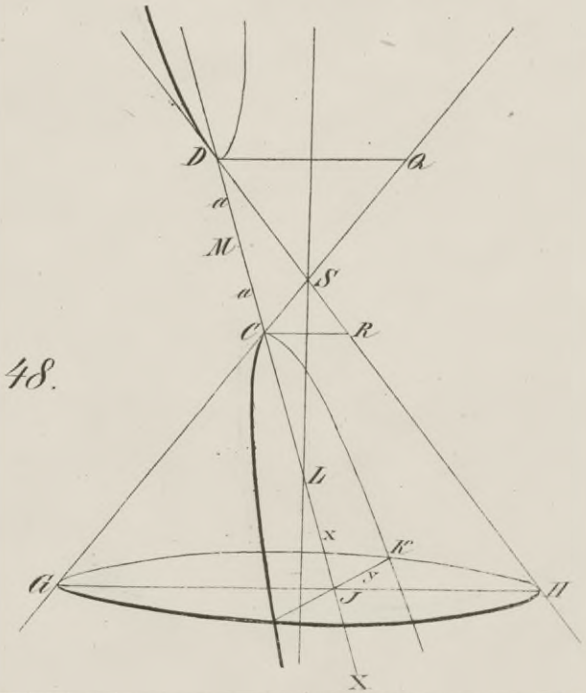
45.



46.



47.



48.

